TD 3 - DÉRIVATION

wiatrowski@math.univ-lyon1.fr

Exercice 1 (d'après IE 01/2010)
Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Quelle est la parité de f ?
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note toujours f la fonction ainsi prolongée.
3. (a) Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.
   (b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$.
   (c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   (d) La fonction f est-elle 2 fois dérivable en 0 ?

Exercice 2
On considère les applications suivantes définies sur $\mathbb{R}$:
$f(x) = |x-2|^3$ $\qquad g(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$
$h(x) = x^3 \sin\dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $h(0) = 0$ $\qquad k(x) = x^4 \sin\dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $k(0) = 0$
Étudier combien de fois ces fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et déterminer pour chacune le plus grand n tel qu'elle soit de classe $\mathcal{C}^n$.

Exercice 3
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x < 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.
Pour quelle(s) valeurs de a, b et c l'application f est-elle : continue sur $\mathbb{R}$? dérivable sur $\mathbb{R}$? dérivable 2 fois sur $\mathbb{R}$? dérivable 3 fois sur $\mathbb{R}$? dérivable 4 fois sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4
1. (**d'après IE 01/2011**) Soit f la fonction définie par $f(t) = \arccos\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)$.
   (a) Donner l'ensemble de définition D_f de f.
   (b) Soit $D_0 = D_f \setminus \{0\}$.
   Montrer que sur D_0, f est dérivable, puis calculer $f'(t)$ pour tout $t \in D_0$.
   (c) En déduire une expression simplifiée de $f(t)$.
2. (**d'après IE 01/2012**) Mêmes questions pour $g(t) = \arcsin\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{2}}\right)$ avec $D_0 = D_g \setminus \{-1, 1\}$.

Exercice 5
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable telle que

$$f(a) = f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = f(b) = 0.$$

Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 6 (d'après IE 01/2010)
Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{\arcsin(x)}{\arccos(x)}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2. Montrer que pour tout $x \in D_f$, $f(x) = \dfrac{\pi}{2\arccos(x)} - 1$.
3. Montrer que sur $]-1,1[$, f est dérivable, et calculer $f'(x)$.
4. Établir le tableau de variations de f, en indiquant les limites de f aux bornes de D_f.
5. Déterminer la limite de $f'(x)$ lorsque x tend vers -1^+.
   L'application f est-elle dérivable en -1 ? (Justifier avec précision votre réponse).
6. (a) Montrer que f établit une bijection de D_f sur un intervalle J que l'on déterminera. On note h l'application réciproque de f.
   (b) Sans calculer explicitement h, justifier pourquoi h est dérivable en 0, et donner la valeur de $h'(0)$.
   (c) Représenter graphiquement f et h dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Exercice 7
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ si $x \neq 1$ et $f(1) = 1$.

1. Étudier la continuité de f.
2. Montrer que $f'(x)$ existe en tout point $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et que $\lim\limits_{x \to 1} f'(x)$ existe.
3. La fonction f est-elle dérivable en 1 ?
4. Donner une expression plus simple de $f(x)$.

Exercice 8
1. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 \leq x \leq y$, on a :

$$\frac{y-x}{1+y^2} \leq \arctan y - \arctan x \leq \frac{y-x}{1+x^2}.$$

2. En déduire que $2 \leq \pi \leq 4$.

Exercice 9
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
   À l'aide du théorème des accroissements finis, déterminer un encadrement de $\ln(k+1) - \ln(k)$ entre deux fractions.
2. En déduire un encadrement de S_n.
3. Quelle est la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$? Quelle est la limite de la suite $\left(\frac{S_n}{\ln(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

Exercice 10 (d'après IE 01/2008)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :
$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = f'(0)$.

1. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et exprimer $g'(x)$ pour $x \neq 0$.
3. Montrer que si f' est croissante sur $\mathbb{R}$ alors g est croissante sur $\mathbb{R}$. (On pourra utiliser le théorème des accroissements finis).
4. *(Question non posée en IE)* Interpréter graphiquement $g(x)$.

Exercice 11

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.
2. En déduire que pour tout $x > 0$, $(1+x)^{\frac{1}{x}} < \mathrm{e} < (1+x)^{\frac{1}{x}+1}$.

Exercice 12
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + \left|-x^2 + x + 2\right|$.

1. Étudier la dérivabilité de f.
2. Déterminer les variations de f et ses éventuels extrema.
3. Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe et tracer son graphe.

Exercice 13
Soit $c \in \mathbb{R}$ et soit $f : x \mapsto x^5 + x^4 + cx^3$.
Déterminer le nombre de points d'inflexion de C_f sur $\mathbb{R}$ et pour quelles valeurs de x ils sont atteints (on distinguera plusieurs cas selon la valeur de c et on précisera dans chaque cas sur quels intervalles f est concave ou convexe).

Exercice 14 (d'après IE 01/2012)
Soit f l'application définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + \frac{(\mathrm{sh}(x))^2}{\sqrt{x}}.$$

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note toujours f l'application ainsi prolongée.
2. (a) Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.
   (b) Calculer $f'(x)$ pour $x \in]0, +\infty[$.
   (c) Montrer que $\frac{f'(x)}{\sqrt{x}}$ admet en 0 une limite finie ℓ que l'on calculera.
   (d) L'application f est-elle de classe C^1 sur $[0, +\infty[$?
   Est-elle 2 fois dérivable en 0 ?
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. (a) À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\mathrm{sh}(x) < x\,\mathrm{ch}(x)$.
   (b) Montrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J à déterminer.
   (c) Étudier en quels points de J l'application f^{-1} est dérivable (le calcul de la dérivée de f^{-1} n'est pas demandé, ni celui de f^{-1}).

Exercice 15

1. Montrer que la restriction de la fonction ch à $\mathbb{R}_+$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
   On note argch sa réciproque (appelée fonction argument cosinus hyperbolique).
   Tracer l'allure de la courbe de argch.
2. Sur quel intervalle K la fonction argch est-elle dérivable ?
3. Pour tout $x \in J$, exprimer $\mathrm{sh}(\mathrm{argch}(x))$ en fonction de x.
   En déduire que pour tout $x \in K$, $\mathrm{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.
4. Pour tout réel y, résoudre l'équation $\mathrm{ch}(x) = y$ dans $\mathbb{R}$ et en déduire l'expression de $\mathrm{argch}(y)$ en fonction de y.

Exercice 16
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dérivable, convexe et vérifiant $f(0) \leq 0$.
Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}^+, f(x+y) \geq f(x) + f(y)$.