

Exercice 1

1. Donner l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :

(a) $y'(x) + 2y(x) = 0$, (b) $3y'(x) - 2y(x) = 0$, (c) $y'(x) - 2iy(x) = 0$.

2. Déterminer une fonction usuelle solution de l'équation suivante sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, puis en déduire l'ensemble de ses solutions à valeurs réelles définies sur I :

$$y'(x) + y(x) = 1 + \tan x + \tan^2 x.$$

Exercice 2

Résoudre sur \mathbb{R} les équations différentielles suivantes :

- | | | |
|------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 1. $y'(x) + 2y(x) = 4x + 7$ | 4. $y'(x) + 2y(x) = 4e^{-2x}$ | 7. $y'(x) + 2y(x) = x^3 + x$ |
| 2. $y'(x) - y(x) = \cos(x)$ | 5. $y'(x) + y(x) = 3x^2$ | 8. $3y'(x) - 2y(x) = e^{3ix}$ |
| 3. $y'(x) - y(x) = \cos(3x)$ | 6. $y'(x) - y(x) = \cos(2x)$ | 9. $y'(x) - y(x) = \cos^3(x)$ |

Exercice 3

Résoudre sur \mathbb{C} les équations différentielles avec condition initiale suivantes :

- | | | |
|---|---|--|
| 1. $\begin{cases} y'(x) + 3y(x) = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$ | 3. $\begin{cases} 3y'(x) + y(x) = 0 \\ y(-3) = e^2 \end{cases}$ | 5. $\begin{cases} y'(x) + y(x) = e^{2x} \\ y(0) = 42 \end{cases}$ |
| 2. $\begin{cases} y'(x) - iy(x) = 2i \\ y(0) = i \end{cases}$ | 4. $\begin{cases} 2iy'(x) - iy(x) = 0 \\ y(4) = 5 + 2i \end{cases}$ | 6. $\begin{cases} 2y'(x) - 3y(x) = e^{\frac{3x}{2}} \\ y(0) = 1 \end{cases}$ |

Exercice 4

Résoudre sur \mathbb{R} les équations différentielles suivantes :

- | | |
|--|----------------------------------|
| 1. $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0$ | 4. $y''(x) + 9y(x) = 0$ |
| 2. $y''(x) - 2\sqrt{3}y'(x) + 3y(x) = 0$ | 5. $y''(x) = 0$ |
| 3. $y''(x) - 9y(x) = 0$ | 6. $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 0$ |

Exercice 5

Résoudre sur \mathbb{R} les équations différentielles suivantes :

- | | |
|---|---|
| 1. $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = \text{sh}(x)$ | 4. $y''(x) = \cos(x)$ |
| 2. $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 10\cos^2(x)$ | 5. $y''(x) + y(x) = \sin(\alpha x)$ ($\alpha \in \mathbb{R}^*$) |
| 3. $y''(x) - y'(x) - 2y(x) = \cos(4x)$ | 6. $y''(x) - 9y(x) = e^x \cos(x)$ |

Exercice 6

Résoudre sur \mathbb{C} les équations différentielles avec condition(s) initiale(s) suivantes :

- | | |
|---|--|
| 1. $\begin{cases} y''(t) + y'(t) + y(t) = \cos(2t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -2 \end{cases}$ | 3. $\begin{cases} y''(t) + 9y(t) = \cos(3t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -2 \end{cases}$ |
| 2. $\begin{cases} y''(t) - y'(t) + 2y(t) = \sin(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ | 4. $\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + y(t) = \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ |

Exercice 7

Soit (E) l'équation différentielle suivante :

$$y''(x) + 4xy'(x) + (3 + 4x^2)y(x) = 0.$$

Soit $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application 2 fois dérivable.

On pose alors, pour tout $x \in \mathbb{R} : z(x) = e^{x^2} y(x)$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $y'(x)$ et $y''(x)$ à l'aide de $z(x)$, $z'(x)$ et $z''(x)$.
2. En déduire que y vérifie (E) si et seulement si z vérifie une équation différentielle (F) que l'on déterminera.
3. Résoudre (F) , puis en déduire l'ensemble des solutions de (E) .

Exercice 8

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$ et qui vérifie :

$$x^2 f''(x) + 3x f'(x) + 4f(x) = 0(E)$$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = f(e^x)$.
Montrer que g est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants (E') .
2. Résoudre (E') .
3. En déduire l'expression de f .

Exercice 9

Trouver dans chaque cas une équation différentielle ayant comme solutions particulières les fonctions u et v :

1. $u(x) = e^{2x}$ et $v(x) = e^{-x}$
2. $u(x) = e^x$ et $v(x) = xe^x$
3. $u(x) = \cos(3x)$ et $v(x) = \sin(3x)$