TD 5 - POLYNÔMES ET FORMULE DE TAYLOR-LAGRANGE

wiatrowski@math.univ-lyon1.fr

Exercice 1
Effectuer la division euclidienne de $A = 3X^4 - X^3 - 3X^2 + 24X - 2$ par $B = X^2 - 2X + 3$.

Exercice 2
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A = (X+1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1$ et $B = X(X+1)(2X+1)$.
Montrer que A est divisible par $B = X(X+1)(2X+1)$ sans poser la division euclidienne.

Exercice 3
On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction polynôme P par $P(x) = x^6 + x^4 - 21x^2 + 4$.

1. Montrer que 2 est une racine de P. Quelle autre racine peut-on en déduire ? Quelle factorisation de P peut-on en déduire ?
2. Trouver toutes les racines de P dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4
Trouver le reste de la division euclidienne de $A = X^{90}$ par $B = X^2 - 3X + 2$.

Exercice 5
Déterminer les réels a tels que $P = X^4 - X + a$ et $Q = X^2 - aX + 1$ aient deux racines communes.

Exercice 6
Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que l'équation $P(x) = \lambda$ ne peut pas admettre une infinité de solutions.
   Quel est au plus son nombre de solutions ?
2. Que peut-on en déduire au sujet de la courbe représentative de P ?

Exercice 7 (d'après IE 11/2010)

1. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que Q vérifie $(R1)$: $\forall x \in \mathbb{C},\ Q(x) = Q(x+1)$ si et seulement s'il est constant. (On pourra s'intéresser aux racines de Q.)
2. On veut maintenant déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que
$$(R2) : \ \forall x \in \mathbb{C},\ (x+4)P(x) = xP(x+1).$$
   (a) Soit P un polynôme vérifiant $(R2)$. Montrer que 0 est une racine de P.
   (b) En déduire trois autres racines de P.
   (c) Montrer que les polynômes vérifiant $(R2)$ sont tous les polynômes de la forme :
   $P = \lambda X(X+1)(X+2)(X+3)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

Exercice 8
Montrer que pour tout $n \geq 2$ le polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ n'a pas de racine multiple dans $\mathbb{C}$.

Exercice 9
Soit $P = X^6 - 5X^4 + aX^2 + bX + c$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.
Déterminer toutes les valeurs possibles de (a,b,c) telles que P admette une racine d'ordre au moins 4 dans $\mathbb{R}$.

Exercice 10
Soient P et Q deux fonctions polynômes. On suppose qu'il existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P^{(k)}(y_0) = Q^{(k)}(y_0)$. Montrer qu'alors P et Q sont égales sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11
Déterminer tous les polynômes P de degré 3 vérifiant les conditions suivantes :

1. $P(1) = 4,\ P'(1) = 0,\ P''(1) = -8,\ P^{(3)}(1) = 3$.
2. $P(1) = 4,\ P'(1) = 0,\ P^{(3)}(1) = 3$.

Exercice 12

1. Soit P un polynôme de degré $n \geq 2$ admettant n racines distinctes $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ dans $\mathbb{R}$.
   Montrer qu'alors sa dérivée P' admet exactement $(n-1)$ racines distinctes dans $\mathbb{R}$.
2. Soit Q un polynôme de degré 3 admettant 3 racines (pas forcément distinctes) dans $\mathbb{R}$.
   Montrer qu'alors sa dérivée Q' admet exactement 2 racines (pas forcément distinctes) dans $\mathbb{R}$. (On distinguera plusieurs cas).

Exercice 13

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer la dérivée k-ième de la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$.
2. Écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n appliquée à f avec $a = 0$ et $b = 1$.
3. Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$.
   À l'aide de la question précédente, déterminer la limite ℓ de la suite S_n lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Déterminer une valeur de n telle que S_n soit une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.

Exercice 14
Démontrer les inégalités suivantes à l'aide de la formule (ou de l'inégalité) de Taylor-Lagrange :

1. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + \dfrac{x^2}{2} \leq \operatorname{ch} x$;
2. pour tout réel x, $\left|\sin(x) - x + \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^5}{120}\right| \leqslant \left|\dfrac{x^7}{5040}\right|$.
   Pour quelles valeurs de x le réel $x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$ est-il une valeur approchée de $\sin(x)$ à 10^{-7} près ?
3. pour tout $x \in [-1,1]$, $\left|e^x - \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}\right)\right| \leq \dfrac{x^4}{8}$.
   Pour quelles valeurs de x le réel $1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$ est-il une valeur approchée de e^x à 10^{-2} près ?

Exercice 15
On considère un objet se déplaçant le long d'une ligne droite. On note $f(t)$ la distance parcourue entre l'instant $t = 0$ et l'instant t (exprimé en secondes).
On suppose que la vitesse initiale de l'objet est de $2m.s^{-1}$ et que son accélération est comprise entre $0,4m.s^{-2}$ et $1m.s^{-2}$. Encadrer la distance parcourue par l'objet en 100 secondes.