TD 6 - COMPARAISON DES FONCTIONS

Exercice 1
Pour chaque expression, donner un équivalent le plus simple possible :

1. $x^5 - 2x^2 + 7x$ en $+\infty$ et en 0
2. $3e^{2x} + \ln(x) - 3x$ en $+\infty$ et en 0^+
3. $\dfrac{x^3 + 2x - \sqrt{x}}{4x^5 + x^2 + 7}$ en $+\infty$ et en 0^+
4. $3\sqrt{x+1} + 4\cos x$ en $+\infty$ et en 0
5. $\sin(x) + 3x$ en $+\infty$ et en 0
6. $2xe^x + \mathrm{sh}(x)$ en $+\infty$ et en 0.

Exercice 2
Montrer à l'aide de la définition que :

1. $1 - \cos(x) = \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x)$
2. $\sin(x) = \underset{x\to 0^+}{\mathrm{o}}(\sqrt{x})$
3. $\sqrt{x^2 + \cos(x)} \underset{x\to-\infty}{\sim} -x$.

Exercice 3
Dans chaque cas, dire si, au voisinage de a, on a $f \sim g$, $f = \mathrm{o}(g)$, $g = \mathrm{o}(f)$ ou aucune de ces relations :

1. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \ln(x)$ et $a = +\infty$
2. $f(x) = x^4 + 5x + 1$, $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}$ et $a = +\infty$
3. $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \cos(x)$ et $a = +\infty$
4. $f(x) = x^2\,\mathrm{sh}(x)$, $g(x) = x^3 + 2x^7$ et $a = 0$
5. $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x^3}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$ et $a = 0$
6. $f(x) = 2\cos(x)$, $g(x) = \cos(2x)$ et $a = 0$
7. $f(x) = (\sqrt{x})^x$, $g(x) = x^{\sqrt{x}}$ et $a = +\infty$

Exercice 4
Déterminer les limites suivantes à l'aide d'équivalents :

1. $\dfrac{\cos(3x) - 1}{\arcsin(x)\ln(1 + 2x)}$ en 0
2. $(x + 3)\sin\left(\dfrac{2}{x}\right)$ en $+\infty$
3. $\left(1 + \dfrac{1}{2x}\right)^{3x}$ en $+\infty$
4. $\dfrac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$ en 0 (avec $a, b \in \mathbb{R}_+^*$)
5. $(\sin(x) + \cos(x))^x$ en 0
6. $(\ln(\mathrm{e} + x))^{\frac{1}{x}}$ en 0.

Exercice 5
Soit f définie par $f(x) = \ln(\mathrm{ch}\, x)$.

1. Préciser le domaine de définition de f et dresser son tableau de variations.
2. Donner un équivalent le plus simple possible de f en 0.
3. Donner un équivalent le plus simple possible de f en $+\infty$, on notera u la fonction définie par cet équivalent.
4. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - u(x) = -\ln 2$. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?
5. Tracer la courbe représentative de f.

Exercice 6
Soit λ un réel. On définit la fonction f_λ par $f_\lambda(x) = \dfrac{x^\lambda}{(x^2+1)\arctan(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Donner des équivalents simples de f_λ au voisinage de 0^+ et de $+\infty$.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de λ, f_λ est-elle prolongeable par continuité à droite en 0 ?
3. Montrer que pour $\lambda \geq 2$, ce prolongement est dérivable à droite en 0.

Exercice 7
Pour chaque expression, donner un équivalent le plus simple possible.

1. $\dfrac{\tan x((1 + x)^{5/2} - 1)}{\sqrt{1 - \cos x}}$ en 0
2. $\ln\left(\dfrac{x + 1}{x}\right)$ en $+\infty$
3. $\cos(x)$ en $\dfrac{3\pi}{2}$
4. $\mathrm{sh}(\tan(x))$ en 0
5. $\arccos(x) - \dfrac{\pi}{2}$ en 0
6. $\sqrt{x + 2} - \sqrt{x}$ en $+\infty$ et en 0^+
7. $x^2 \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en 0^+, 0^- et $+\infty$. (**IE 01/2010**)
8. $\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2+3}} - 1$ en $+\infty$
9. $\ln(x^3 + 2x^2 + 5)$ en $+\infty$
10. $\sqrt{\cos x} - 1$ en 0
11. $\mathrm{ch}(x) - \mathrm{e}^{-2x}$ en $+\infty$, en $-\infty$ et en 0