TD 7 - TAYLOR-YOUNG, DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Exercice 1
Soit $b \in \mathbb{R}$ et soit $\alpha > 0$. Soit $I = [b-\alpha, b+\alpha]$.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I et 2 fois dérivable en b.
Pour tout réel $t \in [-\alpha, 0[\cup]0, \alpha]$, on pose $g(t) = \dfrac{f(b+t)+f(b-t)-2f(b)}{t^2}$.
À l'aide de la formule de Taylor-Young, déterminer la limite de $g(t)$ lorsque t tend vers 0.

Exercice 2
Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de 0 et admettant les développements limités suivants en 0 :
$f(x) = 2 + x - x^2 + o(x^2)$ et $g(x) = 1 - 3x + o(x)$.
Donner les développements limités en 0, à l'ordre le plus grand possible, de $f+g$, fg, $\dfrac{f}{g}$, $x \mapsto f(x^3)$ et $x \mapsto f(x-2x^2)$.

Exercice 3
Les fonctions suivantes admettentent-elles un développement limité en 0 ? Si oui, à quel ordre ?
Donner, le cas échant, la valeur de $f'(0)$ (sans calcul de dérivée) et l'équation de l'éventuelle tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

1. $f(x) = \begin{cases} \cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
2. $f(x) = 11x^7 + 3x^4 - 5x + 6$
3. $f(x) = 3 + 5|x|$
4. $f(x) = 1 + 2x - 8\arcsin(x^2) + x^2\arctan(x)$.

Exercice 4
Calculer les développements limités suivants et donner si possible leur interprétation graphique :

1. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto x^4 - x + 2$
2. $\mathrm{DL}_5(1)$ de $x \mapsto x^4 - x + 2$
3. $\mathrm{DL}_4(0)$ de $x \mapsto \cos(3x)$
4. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \mathrm{e}^x\sqrt{1+x}$
5. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \dfrac{(1+x)^{5/2}}{\cos(x)}$
6. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x+x^2)$
7. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto (1-x+x^2)^{\frac{3}{2}}$
8. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \sqrt{\sin(x)+\cos(x)}$
9. $\mathrm{DL}_3\left(\dfrac{1}{2}\right)$ de $x \mapsto \arctan x$
10. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \ln(2+\sin(x))$
11. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \mathrm{e}^{\cos(x)}$
12. $\mathrm{DL}_5\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ de $x \mapsto \sin x$
13. $\mathrm{DL}_3(-2)$ de $x \mapsto x\mathrm{e}^x$ **(IE 01/2013)**

Exercice 5
Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^3\sin(\frac{1}{x^2})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
Montrer que f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0, mais que f n'est pas 2 fois dérivable en 0.
À quel ordre la fonction f' admet-elle un développement limité en 0 ?

Exercice 6
Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x - \ln(1+x)}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\sqrt{1+2x} - 1 - \operatorname{sh}(x)}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

Exercice 7 (d'après IE 01/2008)

1. Déterminer le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction f définie sur $]-1, 0[\cup]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.
   On prolonge f par continuité en 0 (en appelant encore f la fonction prolongée).
   Á l'aide du développement limité de f en 0, que peut-on dire de la dérivabilité de f en 0 et de la forme locale de la courbe représentant f au voisinage du point d'abscisse 0 ? Faire un dessin.
2. On définit une fonction g sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$.
   (a) Montrer qu'en 0^+, $g(x) \sim x$.
   (b) Montrer, à l'aide du développement de la question 1, qu'il existe des réels non nuls a, b et c tels qu' au voisinage de $+\infty$, on ait $g(x) = ax + b + c\dfrac{1}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   Qu'en déduit-on pour la courbe représentant g ?

Exercice 8
Montrer dans chacun des cas suivants que f admet un prolongement par continuité en 0, noté φ, qui est dérivable en 0, et déterminer l'équation de la tangente au graphe C_φ au point d'abscisse 0 et les positions relatives de cette tangente et de C_φ.

1. $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{\operatorname{ch}(x)-1}{x^2}\right)$ **(IE 01/2004)**
2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x}$

Exercice 9
Étude complète de la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 3 - \dfrac{x\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)-1} \end{cases}$.

Exercice 10
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer si la courbe C_f de f admet des asymptotes en $+\infty$ et en $-\infty$ puis déterminer le cas échéant la position de C_f par rapport aux asymptotes :

1. $f(x) = (x-2)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$
2. $f(x) = \sqrt{4x^2+5x+1} - x$.
3. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^4}{x^2+1}}$.

Exercice 11
Soit $g(x) = \sin(x) - \dfrac{x+ax^3}{1+bx^2}$.
Trouver les réels a et b pour que la fonction g ait un développement limité au voisinage de 0 qui commence par un terme d'ordre le plus élevé possible.

Exercice 12 (d'après IE 01/2009)
Soit f définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Justifier que f admet un développement limité à tout ordre en 0.
2. (a) Calculer le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0.
   (b) En déduire l'équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0, et la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T au voisinage de ce point.
3. Calculer $f'(x)$.
4. Soit F la restriction de f à l'intervalle $I =]-1, e-1[$.
   Montrer que F réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.
5. On note g la bijection réciproque de F.
   Donner le tableau de variations de g, puis étudier sa dérivabilité sur J (le calcul de sa dérivée n'est pas demandé).
6. On admet que g admet en 0 un développement limité à l'ordre 2, de la forme :
$$g(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + o\left(x^2\right).$$
   Calculer le développement limité de $g \circ F$ en 0 en fonction de α, β et γ, puis en déduire les valeurs des coefficients α, β et γ.
7. (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, l'équation $x - n\ln(x) = 0$ admet une unique solution (que l'on ne cherchera pas à calculer) dans l'intervalle $]0, e[$.
   On note u_n cette solution.
   (b) Montrer qu'il existe des réels a, b, et c, que l'on déterminera, tels que quand n tend vers l'infini,
$$u_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 13 (d'après IE 01/2013)
Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2 \mathrm{th}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Donner sans justifications le tableau de variations de la fonction th, et sa dérivée.
2. Étudier la parité de f. Que peut-on en déduire au sujet de $\mathcal{C}_f$?
3. (a) Déterminer un équivalent simple de f en $+\infty$.
   En déduire les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
   (b) Donner les développements limités à l'ordre 3 en 0 de sh et ch, et en déduire celui de th.
   (c) Montrer qu'il existe des réels a, b, c, que l'on déterminera, tels qu'au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$:
$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$
   (d) Que peut-on en déduire au sujet de $\mathcal{C}_f$?
4. (a) Déterminer des équivalents simples de f en 0^+ et en 0^-.
   (b) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note toujours f la fonction ainsi prolongée.
   (c) Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.
5. Justifier rapidement que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$, puis calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$.
6. L'application f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?
7. Montrer que f n'admet pas de développement limité à l'ordre 2 en 0.
   Sans faire de calculs, déterminer si l'application f est 2 fois dérivable en 0.
8. (a) À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $t > 0$:
$$\mathrm{th}(t) > t(1 - \mathrm{th}^2(t)).$$
   (b) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}_+$, puis établir le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
9. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, notée x_n.
   (b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (c) Déterminer la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (d) À l'aide des résultats de la question 3, montrer que $x_n \underset{n\to\infty}{\sim} n$, puis déterminer un équivalent simple de $x_n - n$ lorsque n tend vers l'infini.