TD 8 - INTÉGRATION

Exercice 1

1. À l'aide d'une intégration de DL, calculer le DL à l'ordre 3 en 0 de arccos.
2. Déterminer le DL à l'ordre 2 en 0 de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x+\mathrm{ch}(x)}$, puis en déduire le DL à l'ordre 3 en 0 de $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{1}{t+\mathrm{ch}(t)}\,\mathrm{d}t$ puis de $G : x \mapsto \displaystyle\int_x^{3x} \frac{1}{t+\mathrm{ch}(t)}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2

Pour chacune des suites suivantes, déterminer sa limite si elle existe :

1. $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{n+n}$
2. $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$
3. $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$

Exercice 3

Soit $\alpha > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$.

1. Montrer que $v_n = \dfrac{u_n}{n^{\alpha+1}}$ est une somme de Riemann, puis calculer la limite de (v_n).
2. En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 4

Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, on pose $\varphi(P) = \displaystyle\int_0^1 P^2(t)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que $\varphi(P) = 0$ si et seulement si P est le polynôme nul.

Exercice 5

Soit f une application continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Interpréter $\varphi(x)$ graphiquement.
2. Calculer $\varphi(x)$ dans les cas suivants :
   $f(t) = 1$, $f(t) = t$, $f(t) = t^2$, $f(t) = e^t$, $f(t) = \cos(2\pi t)$.
3. Montrer que si f est bornée sur $\mathbb{R}$, alors φ est bornée sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et calculer $\varphi'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Si f est monotone sur $\mathbb{R}$, que peut-on en déduire au sujet de φ ?
5. Montrer que si f tend vers une limite finie ℓ en $+\infty$, alors φ tend vers la même limite.

Exercice 6

Soit f une application définie et continue de $[0,1]$ **dans** $[0,1]$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f = \int_0^1 f^2$.

Montrer que f est une fonction constante de valeur 0 ou 1 (considérer la fonction $f - f^2$).

Exercice 7

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^1 f = \frac{1}{2}$.

1. Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = \dfrac{1}{2}$.
2. Montrer qu'il existe $d \in [0,1]$ tel que $f(d) = d$.

Exercice 8 (d'après IE 04/2008)

Soit φ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{sh}(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que φ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.
2. Calculer $\varphi'(x)$ pour $x \in]0,+\infty[$.
3. Soit h la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $h(t) = \dfrac{\mathrm{sh}(t)}{t}$. Montrer que h est prolongeable par continuité en 0^+.
4. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = \ln(2)$ (on pourra utiliser une formule de la moyenne).
5. Déterminer la limite de φ en $+\infty$.

Exercice 9

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \displaystyle\int_{x-1}^{x+3} (1+t)\ln(t)\,\mathrm{d}t$
2. $f : x \mapsto \displaystyle\int_{x-4}^{x} \frac{\arctan(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$
3. $f : x \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{2x} \frac{\sin(t)}{e^t-2}\,\mathrm{d}t$
4. $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{3x} \arccos\left(\frac{t+1}{2}\right)\mathrm{d}t$.

Exercice 10

On considère la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{\cos^2 x} \arccos(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t + \int_0^{\sin^2 x} \arcsin(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t$.

1. Vérifier (avec soin !) que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer $f(-x)$ et $f(x+\pi)$ en fonction de $f(x)$. En déduire un intervalle d'étude pour f.
3. Montrer que f est dérivable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ puis calculer $f'(x)$. En déduire une expression plus simple pour f.

Exercice 11 (d'après IE 03/2011)
Soit $D =]0,1[\cup]1,+\infty[$. Pour tout $x \in D$, on définit $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier l'existence de $f(x)$.
2. Déterminer le signe de $f(x)$.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur D.
4. Calculer f', et en déduire les variations de f sur D.
5. (a) Pour tout $x \in]1,+\infty[$, montrer que : $\dfrac{x^2-x}{2\ln x} \leq f(x) \leq \dfrac{x^2-x}{\ln x}$.
   En déduire la limite de f en $+\infty$.
   (b) Faire un travail analogue sur $]0,1[$ pour en déduire la limite de f en 0^+.
6. *(Question non posée à l'interro).* Pour $x \in D$, calculer $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t$, puis en déduire un encadrement de $f(x)$ sur D. Quelle est la limite de f en 1 ?

Exercice 12
Pour tout $x > 0$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{t+x}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est décroissante sur $]0,+\infty[$ (on ne cherchera pas à dériver F).
2. (a) Soit $x > 0$ fixé. À l'aide d'un encadrement de $\dfrac{\mathrm{e}^t}{t+x}$ lorsque $t \in [0,1]$, montrer que :
   $$\ln\left(\frac{1+x}{x}\right) \leq F(x) \leq \mathrm{e}\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)$$
   (b) En déduire les limites de F en 0^+ et en $+\infty$.
3. (a) Soit h la fonction définie sur $]0,1]$ par $h(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t - 1}{t}$. Montrer que h est prolongeable par continuité en 0^+.
   On note $\tilde{h}$ la fonction ainsi prolongée. Soit alors $C = \displaystyle\int_0^1 \tilde{h}(t)\,\mathrm{d}t$.
   (b) Montrer que pour tout $x > 0$, on a $0 \leq F(x) - \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t+x}\,\mathrm{d}t \leq C$.
   (c) En déduire la limite de $\dfrac{F(x)}{\int_0^1 \frac{1}{t+x}\,\mathrm{d}t}$ lorsque x tend vers 0^+.
   Puis en déduire un équivalent simple de F en 0^+.
4. (a) Montrer que pour tout $x > 0$ on a $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t - xF(x) \leq \frac{\mathrm{e}}{x}$.
   (b) En déduire la limite de $xF(x)$lorsque x tend vers $+\infty$, puis un équivalent de F en $+\infty$.