TD 9 - PRIMITIVES

wiatrowski@math.univ-lyon1.fr

Exercice 1
Déterminer les primitives des fonctions suivantes (en précisant les ensembles de définition) :

1. $x(x^3+2)$
2. $\dfrac{7}{x+3}$
3. $\dfrac{4}{(x-1)^2}$
4. $\tan x$
5. e^{-3x+5}
6. $\operatorname{sh}\left(3x+\dfrac{\pi}{5}\right)$
7. $\tan^2 x$
8. $\dfrac{2}{1+(\frac{x}{7})^2}$
9. $\cos^3 x$
10. $\dfrac{-5}{\sqrt{9-x^2}}$
11. $\dfrac{4x+6}{x^2+3x+7}$
12. $\sqrt{2x+8}$
13. $(4-3x)^5$
14. $x\mathrm{e}^{3x^2-5}$
15. $\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$

Exercice 2
Déterminer les primitives des fonctions suivantes (en précisant les ensembles de définition) à l'aide d'intégrations par parties :

1. $x\arctan x$
2. $(x+2)\mathrm{e}^{-x}$
3. $\sqrt{x}\ln x$
4. $\mathrm{e}^x\cos x$

Exercice 3
Calculer les intégrales suivantes à l'aide de changements de variable :

1. $\displaystyle\int_0^{1/2}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ (poser $x=\cos t$)
2. $\displaystyle\int_{1/2}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ (poser $x=\sin t$)

Exercice 4
Calculer les primitives des fonctions suivantes à l'aide de changements de variable (on précisera avec soin les intervalles considérés pour chaque variable) :

1. $\dfrac{\sin(2x)}{3+\sin(x)}$ (poser $u=\sin(x)$)
2. $\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$ (poser $x=\tan t$)
3. $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ (poser $x=\dfrac{1}{u}$)
4. $\dfrac{\tan(x)}{4+\cos^2(x)}$ (poser $u=\cos(x)$)

Exercice 5
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, soit $I_n=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}(\ln(x))^n\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Étudier le sens de variation et le signe de I_n. Que peut-on en déduire ?
3. Reformuler I_n à l'aide du changement de variable $x=\mathrm{e}^t$, puis en déduire une majoration de I_n en fonction de n.
4. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.
6. En déduire l'expression de I_n en fonction de I_{n+1}, puis un équivalent de I_n quand n tend vers l'infini.

Exercice 6
Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de classe C^1 et strictement croissante.
On considère $I_1=\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $I_2=\displaystyle\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Justifier l'existence de f^{-1} et le fait que I_2 soit bien définie.
2. Effectuer le changement de variable $x=f(t)$ dans l'intégrale I_2.
   Puis calculer I_2 en fonction de I_1.
3. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Exercice 7
Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples sur $\mathbb{R}$, puis déterminer leurs primitives (en précisant les ensembles de définition) :

1. $\dfrac{2x^3}{x^2-4x+3}$
2. $\dfrac{5x+1}{x^2-4x+4}$
3. $\dfrac{2x^2+3x-1}{(x^2+1)(x-1)}$
4. $\dfrac{4x}{(x+2)(x^2+4)}$
5. $\dfrac{6x+5}{x^2+4x+29}$
6. $\dfrac{5x^2-3x+6}{(x^2-6x+13)(x-1)}$

Exercice 8
Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[a,b]$.

1. Montrer à l'aide d'un changement de variable que : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-t)\,\mathrm{d}t$.
   En déduire la valeur de $I=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}}\ln(\tan x)\,\mathrm{d}x$.
2. On suppose que pour tout $x\in[a,b]$, $f(a+b-x)=f(x)$.
   Montrer que $\displaystyle\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
   En déduire la valeur de $K=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 9 (d'après IE 03/2007)

1. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $F(x)=\dfrac{4x}{(1+x)^2(1+x^2)}$.
2. En déduire le calcul de $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$. (On pourra utiliser, après avoir justifié sa validité, le changement de variable $t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ en admettant que $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$.)

Exercice 10
Calculer les intégrales suivantes : $I_1=\displaystyle\int_1^2\frac{\arctan(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ et $I_2=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1}$.

Exercice 11
Calculer les primitives des fonctions suivantes :

1. $\ln^2(x)$
2. $\dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$

Exercice 12
On définit les **intégrales de Wallis** : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\ \mathrm{d}x$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\ \mathrm{d}x$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = J_n$.
2. Calculer I_0, I_1 et I_2.
3. Étudier le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
4. (a) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n.$$
   (b) En déduire les valeurs de I_3, I_4, I_5 et I_6.
5. (a) Montrer qu'il existe une constante C (que l'on déterminera) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $(n+1)I_nI_{n+1} = C$.
   (b) En déduire la valeur de la limite de (I_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
6. (a) Soit $u_n = \dfrac{I_{n+1}}{I_n}$ (pour $n \geq 0$).
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{n+1}{n+2} \leq u_n \leq 1$.
   En déduire que $I_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} I_n$.
   (b) En déduire que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Exercice 13

1. Soit $P = \dfrac{2}{X(X+1)(X+2)}$.
   Décomposer P en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$.
   Calculer S_n en fonction de n. Quelle est sa limite quand n tend vers l'infini ?

Exercice 14 (d'après IE 01/2014)
Á l'aide de deux méthodes différentes, calculer l'intégrale $J = \displaystyle\int_{1/2}^{2} \left(x + \frac{1}{x^3}\right) \ln(x)\ \mathrm{d}x$: l'une à l'aide du changement de variable $x = \dfrac{1}{t}$, l'autre à l'aide d'une intégration par parties.