Factorielle et binôme de Newton

Cours

Définition 1. — On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n\,! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n \quad (\text{« factorielle } n \text{ »})$$

et l'on pose $0\,! = 1$. On peut définir $n\,!$ par récurrence selon $(n+1)! = n\,! \times (n+1)$.

Rappel. — Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire à deux issues possibles (par exemple succès et échec). Un schéma de Bernoulli est une répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Supposons que l'on répète n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Notons p la probabilité de succès à chaque épreuve. On obtient ainsi un schéma de Bernoulli de paramètres n et p que l'on peut représenter par un arbre.

Définition 2. — Pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, le nombre de chemins fournissant k succès sur les n répétitions est $\binom{n}{k}$ (« k parmi n »).

On peut démontrer que

$$\binom{n}{k} = \frac{n\,!}{k\,!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k\,!}.$$

On peut aussi montrer que $\binom{n}{k}$ représente le nombre de sous-ensembles de k éléments d'un ensemble ayant n éléments, ou encore le nombre de façons de choisir k éléments dans un ensemble ayant n éléments.

On peut établir par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ (formule du binôme de Newton),

$$\boxed{\begin{aligned}(x+y)^n &= \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\\ &= \binom{n}{0}y^n + \binom{n}{1}xy^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1}y + \binom{n}{n}x^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k.\end{aligned}}$$

Les nombres $\binom{n}{k}$ sont encore appelés coefficients binomiaux. Ils vérifient les propriétés suivantes :

a) pour tous $k, n \in \mathbb{N}$ tels que $k \leqslant n$, $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$;

b) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$, $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$;

c) pour tous $k, n \in \mathbb{N}$ tels que $k \leqslant n-1$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ (formule du triangle de Pascal).

Pour calculer $\binom{n}{k}$ pour de petites valeurs de k et n, on peut utiliser le triangle de Pascal :

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Notation. — Soit $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant q$ et $u_p, u_{p+1}, \ldots, u_{q-1}, u_q$ des nombres. On note

$$\prod_{i=p}^{q} u_i = u_p \times u_{p+1} \times \cdots \times u_{q-1} \times u_q.$$

Par exemple, $n\,! = \prod_{i=1}^{n} i$, $\mathrm{e}^{\sum_{i=1}^{n} u_i} = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{u_i}$ et si $u_1, \ldots, u_n > 0$, $\ln\left(\prod_{i=1}^{n} u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln u_i$.

Application 1 : linéarisation. — À l'aide du binôme de Newton et de la formule d'Euler, pour tout entier $n \geq 2$, on peut transformer $\cos^n(x)$ et $\sin^n(x)$ en sommes de termes de la forme $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Exemple : par la formule d'Euler, $\sin^3(x) = \left(\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^3$. Donc, grâce au binôme,

$$\begin{aligned}\sin^3(x) &= \frac{1}{-8\mathrm{i}}\left[(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^3 + 3(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^2(-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}) + 3(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})(-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^2 + (-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^3\right]\\ &= -\frac{1}{8\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} - 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}\right) = -\frac{1}{8\mathrm{i}}\left[2\mathrm{i}\sin(3x) - 3 \times 2\mathrm{i}\sin(x)\right]\\ &= -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x).\end{aligned}$$

Application 2 : antilinéarisation. — À l'aide du binôme de Newton et de la formule de De Moivre, pour tout entier $n \geq 2$, on peut transformer $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en sommes de termes de la forme $\cos^k(x)\sin^l(x)$, $k, l \in \mathbb{N}$.

Exemple : on a $\cos(3x) = \Re e\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(3x)}\right)$ et $\sin(3x) = \Im m\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(3x)}\right)$. Or, par la formule de De Moivre et le binôme de Newton,

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} &= \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^3 = (\cos x + \mathrm{i}\sin x)^3 = \cos^3 x + 3\cos^2 x(\mathrm{i}\sin x) + 3\cos x(\mathrm{i}\sin x)^2 + (\mathrm{i}\sin x)^3\\ &= \left(\cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x\right) + \mathrm{i}\left(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x\right).\end{aligned}$$

D'où, en prenant partie réelle et partie imaginaire,

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x = \cos^3 x - 3\cos x(1 - \cos^2 x)\\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x,\\ \sin(3x) &= 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x = 3(1 - \sin^2 x)\sin x - \sin^3 x\\ &= 3\sin x - 4\sin^3 x.\end{aligned}$$

Factorielle et binôme de Newton

Exercices

Exercice 1 (Factorielle)

1. Donner la valeur de $n\,!$ pour $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 7\}$.
2. Calculer $\dfrac{50\,!}{46\,!}$.
3. Montrer par récurrence que pour $n \geqslant 10$, $n\,! \geqslant 362880 \times 10^{n-9}$.
4. Montrer que $\dfrac{(2n)!}{n\,!}$ est un entier pour tout $n \in \mathbb{N}$ et le calculer pour $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.
5. Simplifier $\dfrac{(2n+3)!}{(2n+1)!}$, $\dfrac{(n+1)!}{(n-2)!} + \dfrac{n\,!}{(n-1)!}$, $\dfrac{(n-1)!}{n\,!} - \dfrac{n\,!}{(n+1)!}$.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k) = 2^n\,n\,!$ et $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n\,n\,!}$.
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\,!} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} < 2$.
8. Trouver le nombre de façons d'ordonner n objets distincts, c'est-à-dire trouver le nombre de permutations de n éléments.
9. Trouver le nombre de façons de choisir des suites ordonnées de k objets distincts choisis parmi n objets distincts.

Exercice 2 (Formule du binôme de Newton)

1. Calculer $\binom{5}{2}$, $\binom{50}{2}$, $\binom{50}{49}$.
2. Développer $(a+b)^6$, $(2x-1)^5$.
3. Soit P une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^4 + 2x^3 - 1$. Calculer $P(x+1)$.
4. Déterminer les coefficients de $a^4b^2c^3$ et $a^4b^3c^3$ dans le développement de $(a-b+2c)^9$.
5. Linéariser $\cos^6 x$. En déduire une primitive de $x \mapsto \cos^6 x$.
6. Écrire $\cos(5x)$ sous la forme $P(\cos x)$ où P est une fonction polynomiale à déterminer.
7. Utiliser la formule du binôme de Newton pour montrer que $1.01^{10} \approx 1.105$. Trouver de même une valeur approchée de 0.99^8 à 10^{-3} près.
8. En considérant la fonction $f : x \mapsto (1+x)^n$, calculer les sommes suivantes :
$$S_1 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k},\ S_2 = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k},\ S_3 = \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k},\ S_4 = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

Pour les insatiables...

Exercice 3 (Factorielle et formule du binôme de Newton)

1. On suppose que $u_0 = 1$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = -n\,u_{n-1}$. Exprimer u_n en fonction de n.
2. À l'aide de l'identité $(x+1)^{2n} = (x+1)^n(x+1)^n$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.
3. En écrivant $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$, obtenir la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=p}^{q}\binom{k}{p}$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant q$.

   Application. — Soit $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Calculer les sommes $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1}$ (pour $n \geqslant 1$) et $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2}$ (pour $n \geqslant 2$).

   (b) En déduire les valeurs des sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k(k-1)$, puis $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2$.

Exercice 4 (Quelques probabilités)

Soit X une variable aléatoire discrète prenant les valeurs $x_1, \ldots, x_n$. On rappelle que la loi de probabilité de X est la donnée des nombres $p_k = \mathbb{P}\{X = x_k\}$, $1 \leqslant k \leqslant n$ et que son espérance et sa variance sont respectivement données par
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n}p_k x_k, \quad \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}(X))^2\big] = \sum_{k=1}^{n}p_k[x_k - \mathbb{E}(X)]^2.$$
Une autre expression de la variance est
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \big[\mathbb{E}(X)\big]^2 \quad \text{avec} \quad \mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{n}p_k x_k^2.$$

1. **Loi uniforme discrète**

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, n\}$, c'est-à-dire une variable aléatoire X à valeurs dans $\{1, 2, \ldots, n\}$ de loi de probabilité définie par
$$\boxed{\forall\,k \in \{1, 2, \ldots, n\},\ \mathbb{P}\{X = k\} = \frac{1}{n}.}$$
   Toutes les valeurs de 1 à n sont équiprobables. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

2. **Loi binomiale**

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. On considère une variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres n et p, c'est-à-dire une variable aléatoire X à valeurs dans $\{0, 1, \ldots, n\}$ de loi de probabilité définie par
$$\boxed{\forall\,k \in \{0, 1, \ldots, n\},\ \mathbb{P}\{X = k\} = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.}$$
   C'est la probabilité du nombre de succès obtenus au cours d'une suite de n épreuves de Bernoulli indépendantes. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.