# TD 1 - OUTILS POUR L'ÉTUDE DES FONCTIONS


wiatrowski@math.univ-lyon1.fr

**Exercice 1**
Écrire à l'aide des symboles $\exists$ et $\forall$ les propositions suivantes.

1. Tout réel compris entre -1 et 1 est le sinus d'un nombre réel.
2. Le nombre 3 n'est le cosinus d'aucun nombre réel.
3. L'application $f$ est décroissante sur $[0,+\infty[$.

**Exercice 2**
Les déductions suivantes sont-elles correctes ?

1. Si (aucun lapin n'est travailleur) et (Marcel est travailleur) alors (Marcel n'est pas un lapin).
2. Si (tous les ours sont hypocrites) et (quelques ours- pas tous- sont végétariens), alors (parmi les animaux qui mangent de la viande, certains sont hypocrites).
3. Si (toute personne malhonnête a de la fièvre) et (les policiers ne sont jamais malhonnêtes) alors (les policiers n'ont pas de fièvre).

**Exercice 3**
Préciser l'ensemble de définition et étudier la parité des fonctions suivantes.
$f_1(x)=\cos(x^3)$, $f_2(x)=\tan\left(\frac{1}{x}\right)$, $f_3(x)=\sqrt{x^4-4x^2+3}$, $f_4(x)=\frac{1+x^2}{\operatorname{sh}(x)}$,
$f_5(x)=\sin(x)\operatorname{ch}(\tan x)$, $f_6(x)=\frac{1+e^x}{1-e^x}$, $f_7(x)=e^{\cos(x)}$, $f_8(x)=e^{\sin(x)}$.

**Exercice 4**
Tracer sans calcul l'allure de la courbe représentative des fonctions suivantes.
$f_1(x)=(x-2)^3$, $f_2(x)=\sqrt{-x}$, $f_3(x)=-\frac{1}{x+1}$, $f_4(x)=3\sin(x)$ sur $[0,2\pi]$,
$f_5(x)=\sin(2x)$ sur $[0,2\pi]$, $f_6(x)=2\,e^{x-3}$, $f_7(x)=1+\operatorname{sh}(-x)$.

**Exercice 5**
Préciser l'ensemble de définition et déterminer les variations (sans calculer la dérivée) des fonctions suivantes : $f_1(x)=\ln(1+e^{-x})$, $f_2(x)=\operatorname{ch}(\ln(x-2))$,
$f_3(x)=\left(\operatorname{sh}\left(\sqrt{x+3}\right)\right)^3$, $f_4(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$.

**Exercice 6**
Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ l'application définie par $f(x)=2\,|x-2|-4\,|x+1|+3\,|x|$.
Donner une écriture de $f(x)$ sans valeur absolue.
Tracer le graphe de $f$ puis résoudre l'équation $f(x)=0$.

**Exercice 7**
Soit $a\in\mathbb{R}$. On considère l'application $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y)=(x-y,ax+y)$.

1. On suppose $a\neq-1$. Montrer que $f$ est bijective et déterminer sa réciproque.
2. On suppose que $a=-1$. Montrer que $f$ n'est ni injective ni surjective.

**Exercice 8**
Montrer que $f:\begin{cases}\mathbb{R}\to]4,+\infty[\\ x\mapsto 3+\sqrt{1+e^{x-2}}\end{cases}$ est une bijection et déterminer sa réciproque.

**Exercice 9**
On considère les applications $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définies pour tout $x\in\mathbb{R}$ par :
$f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ et $g(x)=|f(x)|$.

1. Montrer que $f$ est périodique et en déterminer une période $T>0$.
2. Résoudre l'équation $f(x)=0$ dans $\mathbb{R}$.
3. Partant du graphe de la fonction cosinus, tracer les graphes de $f$ et $g$ sur $[-T,2T]$.
4. Étudier la parité des applications $h:x\longmapsto f\left(x+\frac{\pi}{8}\right)$ et $l:x\longmapsto f\left(x+\frac{3\pi}{8}\right)$.

**Exercice 10**
Pour chacune des applications suivantes, dire si elle est injective, surjective, bijective.

$f_1:\begin{cases}\mathbb{N}\to\mathbb{N}\\ n\mapsto n+2\end{cases}$ $f_2:\begin{cases}\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\\ n\mapsto n+2\end{cases}$ $f_3:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^4+3x^2-5\end{cases}$

$f_4:\begin{cases}\mathbb{R}\to[-1,1]\\ x\mapsto\cos x\end{cases}$ $f_5:\begin{cases}[0,\pi]\to[-1,1]\\ x\mapsto\cos x\end{cases}$ $f_6:\begin{cases}\mathbb{C}\to\mathbb{R}^+\\ z\mapsto|z|\end{cases}$

**Exercice 11**
Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ l'application définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

1. Écrire le trinôme $x^2+x+1$ sous forme canonique.
2. Montrer que la fonction $g:x\longmapsto f(x-1/2)$ est paire. Quelle propriété géométrique peut-on en déduire sur le graphe de $f$ ?
3. Sans utiliser la dérivée de $f$, étudier les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$ et tracer son graphe.
4. Déterminer graphiquement $f(\mathbb{R})$.
5. Soit $y\in\mathbb{R}$ fixé. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue $x$ suivante : $y=f(x)$.
6. Retrouver alors $f(\mathbb{R})$, puis trouver les deux intervalles maximaux $J_1$ et $J_2$ sur lesquels la restriction de $f$ réalise une bijection vers $f(\mathbb{R})$. On écrira explicitement les bijections réciproques.

**Exercice 12**
On note $E=\mathbb{C}\setminus\{2i\}$. Soit $f:E\longrightarrow E$ définie par $f(z)=\frac{i-2z}{2+iz}$.

1. Montrer que $f$ est bien une application de $E$ dans $E$, puis calculer $f\circ f$.
2. En déduire que $f$ est bijective et donner l'expression de sa réciproque.

**Exercice 13**
Montrer que $f:\mathbb{N}^2\longrightarrow\mathbb{N}^*$, définie par $f(p,q)=2^p(2q+1)$ est bijective.

**Exercice 14**

1. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ l'application définie par $f(n) = 3n^2 - n + 7$.
Justifier que $f$ est bien à valeurs dans $\mathbb{N}$. Est-elle injective ? Surjective ?
2. Mêmes questions pour l'application $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $g(n) = n^2 - 2n + 2$.

**Exercice 15 (IE - 10/2013)**

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ les applications définies par :
pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f(k) = 2k$ et $g(k) = \frac{k}{2}$ si $k$ est pair et $\frac{k-1}{2}$ si $k$ est impair.

1. Étudier l'injectivité et la surjectivité de $f$.
2. Étudier l'injectivité et la surjectivité de $g$.
3. Préciser les applications $g \circ f$ et $f \circ g$. Étudier leur injectivité et leur surjectivité.

**Exercice 16**

1. Simplifier les expressions suivantes : $\left(\frac{1}{49}\right)^{-3/2}$ $\left(\frac{1}{32}\right)^{-0,8}$ $\left(\frac{32}{243}\right)^{-2/5}$ $\left(\frac{27}{2\sqrt{2}}\right)^{2/3}$
2. Tracer l'allure des représentations graphiques des fonctions suivantes :
$f_1 : x \longmapsto x^{0,25}$ $f_2 : x \longmapsto x^{-0,7}$ $f_3 : x \longmapsto x^{\sqrt{2}}$ $f_4 : x \longmapsto \pi^x$ $f_5 : x \longmapsto \left(\frac{1}{3}\right)^x$

**Exercice 17 (Fonction tangente hyperbolique)**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$.

1. Étudier la parité de th.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}(x) = \frac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$. En déduire la limite de th en $+\infty$, puis en $-\infty$. En déduire également son sens de variation sur $\mathbb{R}$ sans utiliser la dérivée.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2 x = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$.
4. Tracer la courbe représentative de th en précisant la tangente au point d'abscisse 0 et les asymptotes éventuelles en $+\infty$ et $-\infty$.

**Exercice 18 (Fonction partie entière)**

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier $n$ tel que $n \leq x < n + 1$. On note cet entier $E(x)$. L'application $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ est appelée « fonction partie entière ».

1. Calculer $E(5)$, $E(-5)$, $E(\pi)$, $E(0,02)$, $E(-0,02)$, $E(3,8)$, $E(-3,8)$, $E\left(\frac{11}{3}\right)$.
La fonction $E$ est-elle impaire ?
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Exprimer $E(x + n)$ en fonction de $E(x)$ et $n$.
3. Tracer le graphe de l'application $E$ sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que les applications $f : x \longmapsto x - E(x)$ et $g : x \longmapsto E(4\,x) - 4\,E(x)$ sont périodiques et tracer leur graphe sur $[-2, 2]$.

**Exercice 19**

On considère les fonctions $P$ et $Q$ définies par : $P(x) = 5x^3 - 2x + 1$ et $Q(x) = 2x^2 - 1$.
Calculer les fonctions polynômes suivantes et donner leurs degrés respectifs :
$P + Q$, $P \times Q$, $P \circ Q$, $Q \circ P$, $x \longmapsto P(x^2)$, $x \longmapsto (Q(x))^3$, $x \longmapsto Q(x + 1) - Q(x)$.

**Exercice 20 (Une courbe de Lissajous)**

Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, on définit dans un repère orthonormé le point $M(t)$ de coordonnées $(\cos(3t), \sin(2t))$.

1. Étudier la courbe paramétrée $t \in [0, \pi/2] \longmapsto M(t)$.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $M(t + 2\pi) = M(t)$.
3. Examiner les symétries de la courbe paramétrée $t \in [0, 2\pi] \longmapsto M(t)$ ; on pourra regarder les points $M(\pi - t)$, $M(t + \pi)$.
4. Tracer alors cette courbe.

**Exercice 21 (Fonctions cosinus et sinus hyperboliques)**

1. Montrer les formules suivantes : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x + y) = \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(y)$ et $\mathrm{sh}(x + y) = \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(y)$.
2. Exprimer $\mathrm{ch}(2x)$ en fonction de $\mathrm{ch}(x)$, puis $\mathrm{sh}(2x)$ en fonction de $\mathrm{ch}(x)$ et $\mathrm{sh}(x)$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(3x) = P(\mathrm{ch}(x))$ où $P$ est une fonction polynôme de degré 3 que l'on déterminera.

**Exercice 22**

Déterminer une fonction polynôme $P$ de degré 3 telle que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) - P(x-1) = x^2$.
En déduire la valeur de la somme $\sum_{k=1}^{n} k^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

**Exercice 23**

Soit $H = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ et $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. On considère l'application $f : \mathbb{C}\backslash\{-\mathrm{i}\} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$.

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\{-\mathrm{i}\}$, $1 - |f(z)|^2 = \frac{4\,\mathrm{Im}(z)}{|z+\mathrm{i}|^2}$.
En déduire que $f(H) \subset D$ et $f(\mathbb{C}\backslash(H \cup \{-\mathrm{i}\})) \subset \mathbb{C}\backslash D$.
2. Soit $w \in D$. Montrer qu'il existe un unique $z \in \mathbb{C}\backslash\{-\mathrm{i}\}$ tel que $f(z) = w$. Montrer que $z \in H$.
3. En déduire que $f$ réalise une bijection de $H$ sur $D$, puis donner l'expression de sa bijection réciproque.

**Exercice 24 (L'astroïde)**

Pour chaque $t \in [0, 2\pi]$, on définit dans un repère orthonormé les points $P(t)$, $Q(t)$ et $m(t)$ de coordonnées respectives $(\cos t, 0)$, $(0, \sin t)$ et $(\cos t, \sin t)$.
On construit le point $M(t)$ pied de la hauteur du triangle $P(t)Q(t)m(t)$ issue de $m(t)$.

1. Montrer que les coordonnées du point $M(t)$ sont données par $(\cos^3 t, \sin^3 t)$.
2. Étudier la courbe paramétrée $t \in [0, \pi/2] \longmapsto M(t)$, puis examiner les symétries de la courbe paramétrée $t \in [0, 2\pi] \longmapsto M(t)$ ; on pourra regarder les points $M(\pi - t)$, $M(t + \pi)$. Tracer alors cette courbe (il s'agit d'une *astroïde*, hypocycloïde à 4 points de rebroussements).