wiatrowski@math.univ-lyon1.fr

TD 4 - ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES À COEFFICIENTS CONSTANTS

Exercice 1

1. Donner l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :

   (a) $y'(x) + 2y(x) = 0$, (b) $3y'(x) - 2y(x) = 0$, (c) $y'(x) - 2iy(x) = 0$.

2. Déterminer une fonction usuelle solution de l'équation suivante sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, puis en déduire l'ensemble de ses solutions à valeurs réelles définies sur I :

$$y'(x) + y(x) = 1 + \tan x + \tan^2 x.$$

Exercice 2

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y'(x) + 2y(x) = 4x + 7$
2. $y'(x) - y(x) = \cos(x)$
3. $y'(x) - y(x) = \cos(3x)$
4. $y'(x) + 2y(x) = 4e^{-2x}$
5. $y'(x) + y(x) = 3x^2$
6. $y'(x) - y(x) = \cos(2x)$
7. $y'(x) + 2y(x) = x^3 + x$
8. $3y'(x) - 2y(x) = e^{3ix}$
9. $y'(x) - y(x) = \cos^3(x)$

Exercice 3

Résoudre sur $\mathbb{C}$ les équations différentielles avec condition initiale suivantes :

1. $\begin{cases} y'(x) + 3y(x) = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} y'(x) - iy(x) = 2i \\ y(0) = i \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3y'(x) + y(x) = 0 \\ y(-3) = e^2 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 2iy'(x) - iy(x) = 0 \\ y(4) = 5 + 2i \end{cases}$
5. $\begin{cases} y'(x) + y(x) = e^{2x} \\ y(0) = 42 \end{cases}$
6. $\begin{cases} 2y'(x) - 3y(x) = e^{\frac{3x}{2}} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Exercice 4

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0$
2. $y''(x) - 2\sqrt{3}y'(x) + 3y(x) = 0$
3. $y''(x) - 9y(x) = 0$
4. $y''(x) + 9y(x) = 0$
5. $y''(x) = 0$
6. $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 0$

Exercice 5

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = \mathrm{sh}(x)$
2. $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 10\cos^2(x)$
3. $y''(x) - y'(x) - 2y(x) = \cos(4x)$
4. $y''(x) = \cos(x)$
5. $y''(x) + y(x) = \sin(\alpha x)$ $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$
6. $y''(x) - 9y(x) = e^x \cos(x)$

Exercice 6

Résoudre sur $\mathbb{C}$ les équations différentielles avec condition(s) initiale(s) suivantes :

1. $\begin{cases} y''(t) + y'(t) + y(t) = \cos(2t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} y''(t) - y'(t) + 2y(t) = \sin(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$
3. $\begin{cases} y''(t) + 9y(t) = \cos(3t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -2 \end{cases}$
4. $\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + y(t) = \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

Exercice 7

Soit (E) l'équation différentielle suivante :

$$y''(x) + 4xy'(x) + (3 + 4x^2)y(x) = 0.$$

Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application 2 fois dérivable.
On pose alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $z(x) = e^{x^2} y(x)$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $y'(x)$ et $y''(x)$ à l'aide de $z(x)$, $z'(x)$ et $z''(x)$.
2. En déduire que y vérifie (E) si et seulement si z vérifie une équation différentielle (F) que l'on déterminera.
3. Résoudre (F), puis en déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 8

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$ et qui vérifie :

$$x^2 f''(x) + 3xf'(x) + 4f(x) = 0 (E)$$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = f(e^x)$.
   Montrer que g est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants (E').
2. Résoudre (E').
3. En déduire l'expression de f.

Exercice 9

Trouver dans chaque cas une équation différentielle ayant comme solutions particulières les fonctions u et v :

1. $u(x) = e^{2x}$ et $v(x) = e^{-x}$
2. $u(x) = e^x$ et $v(x) = xe^x$
3. $u(x) = \cos(3x)$ et $v(x) = \sin(3x)$