

Exercice 1

Effectuer la division euclidienne de $A = 3X^4 - X^3 - 3X^2 + 24X - 2$ par $B = X^2 - 2X + 3$.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A = (X + 1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1$ et $B = X(X + 1)(2X + 1)$.

Montrer que A est divisible par $B = X(X + 1)(2X + 1)$ sans poser la division euclidienne.

Exercice 3

On définit sur \mathbb{R} la fonction polynôme P par $P(x) = x^6 + x^4 - 21x^2 + 4$.

1. Montrer que 2 est une racine de P . Quelle autre racine peut-on en déduire ? Quelle factorisation de P peut-on en déduire ?
2. Trouver toutes les racines de P dans \mathbb{R} .

Exercice 4

Trouver le reste de la division euclidienne de $A = X^{90}$ par $B = X^2 - 3X + 2$.

Exercice 5

Déterminer les réels a tels que $P = X^4 - X + a$ et $Q = X^2 - aX + 1$ aient deux racines communes.

Exercice 6

Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que l'équation $P(x) = \lambda$ ne peut pas admettre une infinité de solutions. Quel est au plus son nombre de solutions ?
2. Que peut-on en déduire au sujet de la courbe représentative de P ?

Exercice 7 (d'après IE 11/2010)

1. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que Q vérifie (R1) : $\forall x \in \mathbb{C}, Q(x) = Q(x + 1)$ si et seulement si Q est constant. (On pourra s'intéresser aux racines de Q .)
2. On veut maintenant déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que

$$(R2) : \forall x \in \mathbb{C}, (x + 4)P(x) = xP(x + 1).$$

- (a) Soit P un polynôme vérifiant (R2). Montrer que 0 est une racine de P .
- (b) En déduire trois autres racines de P .
- (c) Montrer que les polynômes vérifiant (R2) sont tous les polynômes de la forme : $P = \lambda X(X + 1)(X + 2)(X + 3)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

Exercice 8

Montrer que pour tout $n \geq 2$ le polynôme $P = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$ n'a pas de racine multiple dans \mathbb{C} .

Exercice 9

Soit $P = X^6 - 5X^4 + aX^2 + bX + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Déterminer toutes les valeurs possibles de (a, b, c) telles que P admette une racine d'ordre au moins 4 dans \mathbb{R} .

Exercice 10

Soit P et Q deux fonctions polynômes. On suppose qu'il existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P^{(k)}(y_0) = Q^{(k)}(y_0)$. Montrer qu'alors P et Q sont égales sur \mathbb{R} .

Exercice 11

Déterminer tous les polynômes P de degré 3 vérifiant les conditions suivantes :

1. $P(1) = 4, P'(1) = 0, P''(1) = -8, P^{(3)}(1) = 3$.
2. $P(1) = 4, P'(1) = 0, P^{(3)}(1) = 3$.

Exercice 12

1. Soit P un polynôme de degré $n \geq 2$ admettant n racines distinctes $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ dans \mathbb{R} .
Montrer qu'alors sa dérivée P' admet exactement $(n - 1)$ racines distinctes dans \mathbb{R} .
2. Soit Q un polynôme de degré 3 admettant 3 racines (pas forcément distinctes) dans \mathbb{R} .
Montrer qu'alors sa dérivée Q' admet exactement 2 racines (pas forcément distinctes) dans \mathbb{R} .
(On distinguera plusieurs cas).

Exercice 13

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer la dérivée k -ième de la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + x)$.
2. Écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n appliquée à f avec $a = 0$ et $b = 1$.
3. Soit $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$.
À l'aide de la question précédente, déterminer la limite ℓ de la suite S_n lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Déterminer une valeur de n telle que S_n soit une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.

Exercice 14

Démontrer les inégalités suivantes à l'aide de la formule (ou de l'inégalité) de Taylor-Lagrange :

1. pour tout $x \in \mathbb{R}, 1 + \frac{x^2}{2} \leq \text{ch } x$;
2. pour tout réel $x, \left| \sin(x) - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} \right| \leq \left| \frac{x^7}{5040} \right|$.
Pour quelles valeurs de x le réel $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ est-il une valeur approchée de $\sin(x)$ à 10^{-7} près ?
3. pour tout $x \in [-1, 1], \left| e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right) \right| \leq \frac{x^4}{8}$.
Pour quelles valeurs de x le réel $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ est-il une valeur approchée de e^x à 10^{-2} près ?

Exercice 15

On considère un objet se déplaçant le long d'une ligne droite. On note $f(t)$ la distance parcourue entre l'instant $t = 0$ et l'instant t (exprimé en secondes).

On suppose que la vitesse initiale de l'objet est de $2m.s^{-1}$ et que son accélération est comprise entre $0, 4m.s^{-2}$ et $1m.s^{-2}$. Encadrer la distance parcourue par l'objet en 100 secondes.