

Exercice 1

Soit $b \in \mathbb{R}$ et soit $\alpha > 0$. Soit $I = [b - \alpha, b + \alpha]$.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I et 2 fois dérivable en b .

Pour tout réel $t \in [-\alpha, 0[\cup]0, \alpha]$, on pose $g(t) = \frac{f(b+t) + f(b-t) - 2f(b)}{t^2}$.

À l'aide de la formule de Taylor-Young, déterminer la limite de $g(t)$ lorsque t tend vers 0.

Exercice 2

Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de 0 et admettant les développements limités suivants en 0 :

$$f(x) = 2 + x - x^2 + o(x^2) \text{ et } g(x) = 1 - 3x + o(x).$$

Donner les développements limités en 0, à l'ordre le plus grand possible, de $f + g$, fg , $\frac{f}{g}$, $x \mapsto f(x^3)$ et $x \mapsto f(x - 2x^2)$.

Exercice 3

Les fonctions suivantes admettent-elles un développement limité en 0? Si oui, à quel ordre?

Donner, le cas échéant, la valeur de $f'(0)$ (sans calcul de dérivée) et l'équation de l'éventuelle tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

$$1. f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$2. f(x) = 11x^7 + 3x^4 - 5x + 6$$

$$3. f(x) = 3 + 5|x|$$

$$4. f(x) = 1 + 2x - 8 \arcsin(x^2) + x^2 \arctan(x).$$

Exercice 4

Calculer les développements limités suivants et donner si possible leur interprétation graphique :

$$1. DL_3(0) \text{ de } x \mapsto x^4 - x + 2$$

$$2. DL_5(1) \text{ de } x \mapsto x^4 - x + 2$$

$$3. DL_4(0) \text{ de } x \mapsto \cos(3x)$$

$$4. DL_3(0) \text{ de } x \mapsto e^x \sqrt{1+x}$$

$$5. DL_3(0) \text{ de } x \mapsto \frac{(1+x)^{5/2}}{\cos(x)}$$

$$6. DL_3(0) \text{ de } x \mapsto \ln(1+x+x^2)$$

$$7. DL_3(0) \text{ de } x \mapsto (1-x+x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$8. DL_3(0) \text{ de } x \mapsto \sqrt{\sin(x) + \cos(x)}$$

$$9. DL_3\left(\frac{1}{2}\right) \text{ de } x \mapsto \arctan x$$

$$10. DL_3(0) \text{ de } x \mapsto \ln(2 + \sin(x))$$

$$11. DL_3(0) \text{ de } x \mapsto e^{\cos(x)}$$

$$12. DL_5\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ de } x \mapsto \sin x$$

$$13. DL_3(-2) \text{ de } x \mapsto xe^x \text{ (IE 01/2013)}$$

Exercice 5

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Montrer que f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0, mais que f n'est pas 2 fois dérivable en 0.

À quel ordre la fonction f' admet-elle un développement limité en 0?

Exercice 6

Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x - \ln(1+x)} \qquad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\sqrt{1+2x} - 1 - \operatorname{sh}(x)}$$

Exercice 7 (d'après IE 01/2008)

1. Déterminer le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction f définie sur $] -1, 0[\cup]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$.

On prolonge f par continuité en 0 (en appelant encore f la fonction prolongée).

À l'aide du développement limité de f en 0, que peut-on dire de la dérivabilité de f en 0 et de la forme locale de la courbe représentant f au voisinage du point d'abscisse 0? Faire un dessin.

2. On définit une fonction g sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

(a) Montrer qu'en 0^+ , $g(x) \sim x$.

(b) Montrer, à l'aide du développement de la question 1, qu'il existe des réels non nuls a, b et c tels qu'au voisinage de $+\infty$, on ait $g(x) = ax + b + c\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.

Qu'en déduit-on pour la courbe représentant g ?

Exercice 8

Montrer dans chacun des cas suivants que f admet un prolongement par continuité en 0, noté φ , qui est dérivable en 0, et déterminer l'équation de la tangente au graphe C_φ au point d'abscisse 0 et les positions relatives de cette tangente et de C_φ .

$$1. f : x \mapsto \ln\left(\frac{\operatorname{ch}(x) - 1}{x^2}\right) \text{ (IE 01/2004)} \qquad 2. f : x \mapsto \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$$

Exercice 9

Étude complète de la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 3 - \frac{x \operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x) - 1} \end{cases}$.

Exercice 10

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer si la courbe C_f de f admet des asymptotes en $+\infty$ et en $-\infty$ puis déterminer le cas échéant la position de C_f par rapport aux asymptotes :

1. $f(x) = (x-2)e^{\frac{1}{x}}$
2. $f(x) = \sqrt{4x^2 + 5x + 1} - x$.
3. $f(x) = \sqrt{\frac{x^4}{x^2 + 1}}$.

Exercice 11

Soit $g(x) = \sin(x) - \frac{x + ax^3}{1 + bx^2}$.

Trouver les réels a et b pour que la fonction g ait un développement limité au voisinage de 0 qui commence par un terme d'ordre le plus élevé possible.

Exercice 12 (d'après IE 01/2009)

Soit f définie sur $] -1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$.

On note \mathcal{C} sa courbe représentative.

1. Justifier que f admet un développement limité à tout ordre en 0.
2. (a) Calculer le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0.
(b) En déduire l'équation de la tangente T à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 0, et la position de \mathcal{C} par rapport à T au voisinage de ce point.
3. Calculer $f'(x)$.
4. Soit F la restriction de f à l'intervalle $I =] -1, e - 1[$.
Montrer que F réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.
5. On note g la bijection réciproque de F .
Donner le tableau de variations de g , puis étudier sa dérivabilité sur J (le calcul de sa dérivée n'est pas demandé).
6. On admet que g admet en 0 un développement limité à l'ordre 2, de la forme :

$$g(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + o(x^2).$$

Calculer le développement limité de $g \circ F$ en 0 en fonction de α , β et γ , puis en déduire les valeurs des coefficients α , β et γ .

7. (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, l'équation $x - n \ln(x) = 0$ admet une unique solution (que l'on ne cherchera pas à calculer) dans l'intervalle $]0, e[$.
On note u_n cette solution.
(b) Montrer qu'il existe des réels a , b , et c , que l'on déterminera, tels que quand n tend vers l'infini,

$$u_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 13 (d'après IE 01/2013)

Soit f l'application définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = x^2 \operatorname{th}\left(\frac{1}{x}\right)$.

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Donner sans justifications le tableau de variations de la fonction th , et sa dérivée.
2. Étudier la parité de f . Que peut-on en déduire au sujet de \mathcal{C}_f ?
3. (a) Déterminer un équivalent simple de f en $+\infty$.
En déduire les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
(b) Donner les développements limités à l'ordre 3 en 0 de sh et ch , et en déduire celui de th .
(c) Montrer qu'il existe des réels a, b, c , que l'on déterminera, tels qu'au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

- (d) Que peut-on en déduire au sujet de \mathcal{C}_f ?
4. (a) Déterminer des équivalents simples de f en 0^+ et en 0^- .
(b) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note toujours f la fonction ainsi prolongée.
(c) Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.
5. Justifier rapidement que f est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^* , puis calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$.
6. L'application f est-elle de classe C^1 sur \mathbb{R} ?
7. Montrer que f n'admet pas de développement limité à l'ordre 2 en 0.
Sans faire de calculs, déterminer si l'application f est 2 fois dérivable en 0.
8. (a) À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $t > 0$:

$$\operatorname{th}(t) > t(1 - \operatorname{th}^2(t)).$$

- (b) En déduire le sens de variation de f sur \mathbb{R}_+ , puis établir le tableau de variations de f sur \mathbb{R} .
9. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans \mathbb{R} , notée x_n .
(b) Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
(c) Déterminer la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
(d) À l'aide des résultats de la question 3, montrer que $x_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n$, puis déterminer un équivalent simple de $x_n - n$ lorsque n tend vers l'infini.