TD 1

Matrices de transition et graphe d'une chaîne de Markov

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur $\{1,2,3\}$ de matrice de transition ($p \in [0,1]$) :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix}$$

1. Dessiner le graphe de cette chaîne de Markov.
2. Calculer $\mathbb{P}(X_1 = 1|X_0 = 1)$, $\mathbb{P}(X_2 = 1|X_0 = 1)$, $\mathbb{P}(X_3 = 1|X_0 = 1)$, $\mathbb{P}(X_4 = 1|X_0 = 1)$, $\mathbb{P}(X_1 = 2|X_0 = 2)$, $\mathbb{P}(X_2 = 2|X_0 = 2)$ et $\mathbb{P}(X_3 = 2|X_0 = 2)$.
3. Quelle est la loi de X_1 si X_0 suit une loi uniforme sur $\{1,2,3\}$.
4. On suppose que X_0 a pour loi $(1/2, 1/4, 1/4)$.
   Calculer $\mathbb{P}(X_1 = 2 \text{ et } X_2 = 3)$ et $\mathbb{P}(X_1 = 2 \text{ et } X_3 = 2)$.

Exercice 2. Anna, Bruno et Carole se lancent un ballon. Anna le lance toujours à Carole, Carole le lance aux deux autres avec la même probabilité, Bruno le lance une fois sur trois à Anna, deux fois sur trois à Carole. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $X_n =$

– A si Anna a le ballon après n lancers ;
– B si Bruno a le ballon après n lancers ;
– C si Carole a le ballon après n lancers.

1. Dessiner le graphe de probabilités associé à $(X_n)_{n\geq 0}$ et écrire sa matrice de transition Q .
2. Notons, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mu_n = (a_n, b_n, c_n)$ la loi de X_n .
   (a) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, calculer μ_{n+1} en fonction de μ_n.
   (b) On suppose que Anna a le ballon au début du jeu. Pour chaque enfant, calculer la probabilité d'avoir le ballon après deux lancers.
3. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ admet une unique probabilité invariante π et la calculer.

Exercice 3. Chaîne à deux états

On considère la chaîne de Markov sur l'espace d'états $\{1,2\}$ dont la matrice de transition est la suivante :

$$\begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

où $p, q \in [0,1]$ sont fixés.

1. Dessiner son graphe. Déterminer la ou les mesures stationnaires.
2. On note $a_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$ et $b_n = \mathbb{P}(X_n = 2)$. Ecrire une relation de récurrence pour les couples (a_n, b_n) et la résoudre.
3. Etudier alors le comportement asymptotique de $\mathbb{P}(X_n = 1)$. Que remarque-t-on ?

Exercice 4. **Dépenses énergétiques**

On dispose, dans une maison individuelle, de deux systèmes de chauffage, l'un de base et l'autre d'appoint. On dira qu'on est dans l'état 1 si seul le chauffage de base fonctionne, et dans l'état 2 si les deux systèmes fonctionnent.

Si un jour on est dans l'état 1, on estime qu'on y reste le lendemain avec une probabilité $\frac{1}{2}$. En revanche, si on est dans l'état 2, le lendemain la maison est chaude, et l'on passe à l'état 1 avec une probabilité $\frac{3}{4}$. Soit X_n l'état du système au jour numéro n.

1. Expliquer pourquoi $(X_n)_{n\geq 0}$ peut être modélisé par une chaîne de Markov homogène. Quel est son espace d'états ? Déterminer sa matrice de transition et son graphe.
2. On pose $p_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$. Déterminer une relation de récurrence entre p_n et p_{n+1}, puis exprimer p_n en fonction de p_0. Que vaut $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} p_n$?
3. Sachant qu'on est dans l'état 1 un dimanche, trouver la probabilité d'être dans le même état le dimanche suivant ?
4. Montrer que si un jour on se trouve dans l'état 1 avec une proba $\frac{3}{5}$, alors il en est de même tous les jours qui suivent.
5. Chaque journée dans l'état 1 coûte 1,5 €, et dans l'état 2 coûte 2 €. Chaque transition de l'état 1 à l'état 2 ou inversement coûte 0,5 €. Calculer le coût moyen d'une journée dans la situation précédente.

Exercice 5. **Bruit qui court**

Un message pouvant prendre 2 formes (oui ou non) est transmis à travers n intermédiaires. On suppose que chaque intermédiaire transmet le message de façon correcte avec une probabilité $p \in]0,1[$ ou le déforme en son contraire avec une probabilité $1-p$. Les intermédiaires sont indépendants.

1. Modéliser cette situation par une chaîne de Markov à 2 états.
2. Calculer la probabilité que l'information transmise par le n-ième intermédiaire soit conforme à l'information initiale.

   Indication : remarquer que (1, 1) et (1,-1) sont vecteurs propres de P et diagonaliser P.
3. Que se passe-t-il lorsque $n \to +\infty$?