ISFA Semestre automne 2017-2018

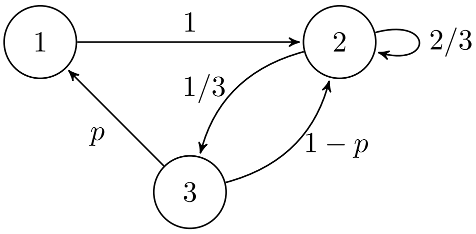
Modèles Aléatoires Discrets - Master Économétrie et Statistiques

---

TD 1

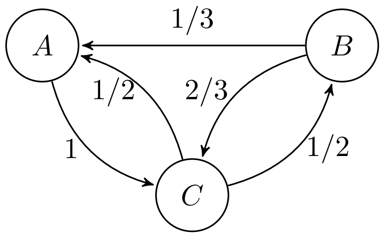
Corrections de quelques exercices

Exercice 1.

1. 

2. $\mathbb{P}(X_1 = 1|X_0 = 1) = p_{1,1} = 0$,
$\mathbb{P}(X_2 = 1|X_0 = 1) = p_{1,1}\ p_{1,1} + p_{1,2}\ p_{2,1} + p_{1,3}\ p_{3,1} = 0 + 0 + 0 = 0$,
$\mathbb{P}(X_3 = 1|X_0 = 1) = p_{1,1}\ \mathbb{P}(X_2 = 1|X_0 = 1) + p_{2,1}\ \mathbb{P}(X_2 = 2|X_0 = 1) + p_{3,1}\ \mathbb{P}(X_2 = 3|X_0 = 1) = 0 + 0 + p\ \mathbb{P}(X_2 = 3|X_0 = 1) = p(p_{1,1}\ p_{1,3} + p_{1,2}\ p_{2,3} + p_{1,3}\ p_{3,3}) = p(0 + 1 \times \frac{1}{3} + 0) = \frac{p}{3}$,
$\mathbb{P}(X_4 = 1|X_0 = 1) = \mathbb{P}(X_4 = 1|X_1 = 2)\ p_{1,2} = p_{3,1}\ \mathbb{P}(X_3 = 3|X_1 = 2)\ p_{1,2} = p(p_{2,1}\ p_{1,3} + p_{2,2}\ p_{2,3} + p_{2,3}\ p_{3,3}) = p(0 + \frac{2}{3}\frac{1}{3} + 0) = \frac{p}{9}$,
$\mathbb{P}(X_1 = 2|X_0 = 2) = p_{2,2} = \frac{2}{3}$,
$\mathbb{P}(X_2 = 2|X_0 = 2) = p_{2,2}\ p_{2,2} + p_{2,3}\ p_{3,2} = \frac{7 - 3p}{9}$,
$\mathbb{P}(X_3 = 2|X_0 = 2) = p_{2,2}\ p_{2,2}\ p_{2,2} + p_{2,2}\ p_{2,3}\ p_{3,2} + p_{2,3}\ p_{3,2}\ p_{2,2} + p_{2,3}\ p_{3,1}\ p_{1,2} = \frac{20 - 3p}{27}$.
3. $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1|X_0 = 1)\mathbb{P}(X_0 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1|X_0 = 2)\mathbb{P}(X_0 = 2) + \mathbb{P}(X_1 = 1|X_0 = 3)\mathbb{P}(X_0 = 3) = 0 + 0 + p \times \frac{1}{3} = \frac{p}{3}$,
$\mathbb{P}(X_1 = 2) = \mathbb{P}(X_1 = 2|X_0 = 1)\mathbb{P}(X_0 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 2|X_0 = 2)\mathbb{P}(X_0 = 2) + \mathbb{P}(X_1 = 2|X_0 = 3)\mathbb{P}(X_0 = 3) = \frac{8 - 3p}{9}$,
$\mathbb{P}(X_1 = 3) = \mathbb{P}(X_1 = 3|X_0 = 1)\mathbb{P}(X_0 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 3|X_0 = 2)\mathbb{P}(X_0 = 2) + \mathbb{P}(X_1 = 3|X_0 = 3)\mathbb{P}(X_0 = 3) = \frac{1}{9}$.
4. Commençons par calculer :
$\mathbb{P}(X_1 = 2) = \mathbb{P}(X_1 = 2|X_0 = 1)\mathbb{P}(X_0 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 2|X_0 = 2)\mathbb{P}(X_0 = 2) + \mathbb{P}(X_1 = 2|X_0 = 3)\mathbb{P}(X_0 = 3) = \frac{11 - 3p}{12}$.
On a ensuite $\mathbb{P}(X_1 = 2 \text{ et } X_2 = 3) = \mathbb{P}(X_1 = 2)\mathbb{P}(X_2 = 3|X_1 = 2) = \frac{11 - 3p}{12} p_{2,3} = \frac{11 - 3p}{36}$,
et $\mathbb{P}(X_1 = 2 \text{ et } X_3 = 2) = \mathbb{P}(X_1 = 2)\mathbb{P}(X_3 = 2|X_1 = 2) = \mathbb{P}(X_1 = 2)\mathbb{P}(X_2 = 2|X_0 = 2)$ car la chaîne de Markov est homogène, or $\mathbb{P}(X_2 = 2|X_0 = 2) = \frac{7 - 3p}{9}$, donc
$\mathbb{P}(X_1 = 2 \text{ et } X_3 = 2) = \frac{11 - 3p}{12}\ \frac{7 - 3p}{9} = \frac{(11 - 3p)(7 - 3p)}{108}$.

Exercice 2.

1. 

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. (a) $\mu_{n+1} = \mu_n Q = \left(\frac{1}{3}b_n + \frac{1}{2}c_n, \frac{1}{2}c_n, a_n + \frac{2}{3}b_n\right)$.

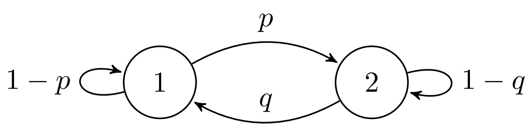
   (b) Comme Anna a le ballon au début du jeu, on a $mu_0 = (1,0,0)$, donc $\mu_2 = \mu_0 Q^2 = (\mu_0 Q)Q = (0,0,1)Q = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$. Ainsi, après deux lancers, Anna et Bruno ont chacun une chance sur deux d'avoir le ballon.

3. $\pi = (a,b,c)$ est un probabilité invariante de $(X_n)_{n\geq 0}$ si et seulement si

$$\begin{cases} \pi = \pi Q \\ 1 = a+b+c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3}b + \frac{1}{2}c = \frac{2}{3}c \\ b = \frac{1}{2}c \\ c = a + \frac{2}{3}b = c \\ 1 = a+b+c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3}c \\ b = \frac{1}{2}c \\ 1 = \frac{2}{3}c + \frac{1}{2}c + c = \frac{13}{6}c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{13} \\ b = \frac{3}{13} \\ c = \frac{6}{13} \end{cases}$$

Ainsi, $(X_n)_{n\geq 0}$ admet une unique probabilité invariante, il s'agit de $\pi = \left(\frac{4}{13}, \frac{3}{13}, \frac{6}{13}\right)$.

Exercice 3. Chaîne à deux états

1. 

$\mu = (a,b)$ est une mesure stationnaire si et seulement si $\mu \in \mathbb{R}_+^2$ et $\mu = \mu Q$.

$$\mu = \mu Q \Leftrightarrow \begin{cases} a = (1-p)a + qb \\ b = pa + (1-q)b \end{cases} \Leftrightarrow pa = qb$$

Si $q \neq 0$:

$$\mu = \mu Q \Leftrightarrow b = \frac{p}{q}a$$

Donc les mesures stationnaires sont les $\mu = \left(a, \frac{p}{q}a\right)$, avec $a \in \mathbb{R}_+$.
Si on impose qu'il s'agisse d'une mesure de probabilité, on a alors une unique probabilité invariante : $\pi = \left(\frac{q}{p+q}, \frac{p}{p+q}\right)$.
Si $q = 0$ et $p \neq 0$:

$$\mu = \mu Q \Leftrightarrow pa = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

Donc les mesures stationnaires sont les $\mu = (0, b)$, avec $b \in \mathbb{R}_+$.
Si on impose qu'il s'agisse d'une mesure de probabilité, on a alors une unique probabilité invariante : $\pi = (0, 1)$.
<u>Si $q = 0$ et $p = 0$:</u>

$$\mu = \mu Q \Leftrightarrow 0 = 0$$

Donc les mesures stationnaires sont toutes les $\mu = (a, b)$, avec $a, b \in \mathbb{R}_+$.
Les probabilités invariantes sont alors les : $\pi = (a, 1-a)$, avec $a \in [0, 1]$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (a_n, b_n)Q = ((1-p)a_n + qb_n, pa_n + (1-q)b_n)$. De plus on a $a_n + b_n = 1$.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{n+1} = (1-p)a_n + q(1-a_n) = (1-p-q)a_n + q$.
Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique.
<u>Si $p + q = 0$:</u>
Comme $p, q \in [0, 1]$, cela implique $p = q = 0$.
On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = a_0$ et $b_n = 1-a_n = 1-a_0 = b_0$.
<u>Si $p + q \neq 0$:</u>
On résout $a = (1-p-q)a + q \Leftrightarrow (p+q)a = q \Leftrightarrow a = \dfrac{q}{p+q}$.
On définit une suite auxiliaire en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = a_n - \dfrac{q}{p+q}$.
On a alors
$u_{n+1} = a_{n+1} - \dfrac{q}{p+q} = (1-p-q)a_n + q - \dfrac{q}{p+q} = (1-p-q)(u_n + \dfrac{q}{p+q}) + q - \dfrac{q}{p+q} = (1-p-q)u_n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $u_n = u_0(1-p-q)^n$ donc $a_n = \left(a_0 - \dfrac{q}{p+q}\right)(1-p-q)^n + \dfrac{q}{p+q}$.
Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$b_n = 1 - a_n = -\left(a_0 - \dfrac{q}{p+q}\right)(1-p-q)^n + \dfrac{p}{p+q} = \left(b_0 - \dfrac{p}{p+q}\right)(1-p-q)^n + \dfrac{p}{p+q}$.

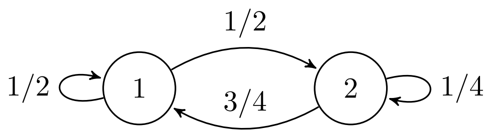
3. <u>Si $p + q = 0$:</u>
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_n = 1) = a_n = a_0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = 1) = a_0$.
<u>Si $p + q = 2$:</u>
On a alors $p = q = 1$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_n = 1) = \left(a_0 - \dfrac{1}{2}\right)(-1)^n + \dfrac{1}{2}$.
Si $a_0 = \dfrac{1}{2}$, la suite est constante et $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = 1) = \dfrac{1}{2}$.
Si $a_0 \neq \dfrac{1}{2}$, la suite ne converge pas.
<u>Si $0 < p + q < 2$:</u>
On a alors $-1 < 1 - p - q < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (1-p-q)^n = 0$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}(X_n = 1) = \left(a_0 - \dfrac{q}{p+q}\right)(1-p-q)^n + \dfrac{q}{p+q}$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = 1) = \dfrac{q}{p+q}$.

On constate alors que dans tous les cas où la suite converge, elle converge vers une probabilité invariante.

Exercice 4. Dépenses énergétiques

1. L'état du système de chauffage un jour donné ne dépend que de son état le jour précédent, $(X_n)_{n\geq 0}$ peut donc être modélisé par une chaîne de Markov sur l'espace d'état $\{1;2\}$. De plus, les règles pour déterminer l'évolution de l'état du chauffage sont fixes, elles ne varie pas au cours du temps, il s'agit donc d'un chaîne de Markov homogène.

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$



2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(p_{n+1}, 1-p_{n+1}) = (p_n, 1-p_n)Q$, donc
$p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{3}{4}(1-p_n) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}p_n$.
Il s'agit d'une suite arithémtico-géométrique. On procède comme à l'exercice précédent (on pourrait même appliquer le résultat de l'exercice précédent avec $p = \frac{1}{2}$ et $q = \frac{3}{4}$), on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$p_{n+1} - \frac{3}{5} = \left(-\frac{1}{4}\right)\left(p_n - \frac{3}{5}\right)$, donc $p_n - \frac{3}{5} = \left(-\frac{1}{4}\right)^n \left(p_0 - \frac{3}{5}\right)$.
Ainsi, pour tout $n \in N$, on a $p_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^n \left(p_0 - \frac{3}{5}\right) + \frac{3}{5}$.
On a alors $\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{3}{5}$.