TD 3

Classification des états et temps de retour

Exercice 1. Probabilité d'absorption

On considère une chaîne de Markov de matrice de transition P et d'espace d'états S. On désigne par S_T le sous-ensemble des états transitoires, supposé fini et non vide. Soit C un sous-ensemble clos irréductible d'états récurrents.

1. Montrer que $\forall x \in S,\ \forall y \in S_T$, on a $\lim_{n\to\infty} P^n(x,y) = 0$.
   En déduire que si S est fini, la chaîne a au moins un état récurrent.
2. Soit T_c le temps d'atteinte d'un élément dans C. On appelle *probabilité d'absorption* de x par C la probabilité :
   $$\rho_C(x) = \mathbb{P}_x(T_C < +\infty)$$
   Montrer que pour tout $x \in S_T$ on a $\rho_C(x) = \sum_{y\in C} P(x,y) + \sum_{y\in S_T} P(x,y)\rho_C(y)$.
3. Soit $S = \{1; ...; 6\}$.
   (a) Compléter la matrice P pour qu'elle soit une matrice de transition :
   $$P = \begin{pmatrix} . & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 7/8 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & . & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & . \end{pmatrix}$$
   (b) Déterminer les états transitoires et récurrents.
   (c) Déterminer les probabilités d'absorption des sous-ensembles clos irréductibles.
4. Determiner l'ensemble des probabilités stationnaires de la chaîne de Markov.
5. Quelle est l'espérance du temps de retour en chaque état récurrent ?

Exercice 2. Dactylographe

1. Un père laisse sa fille de 3 ans jouer avec son ordinateur, qui n'a plus que N touches à son clavier. L'enfant tape au hasard des lettres, et le père attend avec impatience de la voir taper "papa" à l'écran. Quel nombre de lettres doit taper l'enfant en moyenne avant d'arriver à ce résultat ?
   Pour cela, on aura intérêt à considérer une chaîne de Markov sur l'ensemble des derniers caractères écrits : $\{\{\emptyset\}, \{p\}, \{pa\}, \{pap\}, \{papa\}\}$. On est dans l'état $\{\emptyset\}$ si les derniers caractères ne sont pas $\{p\}, \{pa\}, \{pap\}$, ou $\{papa\}$. Il est conseillé d'imposer une transition de $\{papa\}$ vers $\{\emptyset\}$ avec probabilité 1, et de regarder l'espérance du temps de retour de $\{papa\}$ vers lui-même.
2. Très fier des exploits de sa fille, le père se donne un mot formé de q lettres *distinctes*, avec $q < N$. Au bout de combien de lettres en moyenne le mot sera-t-il écrit ?

Exercice 3. **Prime d'assurance véhicules**

Un contrat d'assurance auto fixe 4 niveaux de prime. La prime de base est P_1, sauf si aucun sinistre n'est déclaré durant l'année précédente. Dans le cas où aucun sinistre n'est déclaré durant une année, la prime baisse d'un niveau l'année suivante. Il y a 4 niveaux de prime P_1, P_2, P_3, P_4. La probabilité qu'un sinistre d'un montant supérieur ou égal à s milliers d'euros survienne vaut e^{-s}. À cause du caractère incitatif de la prime rabaissée, tous les sinistres ne sont pas déclarés à l'assurance. On note s_1, s_2, s_3, s_4 les sommes limites en dessous desquelles l'assuré-e ne déclare pas son sinistre. s_j est la limite pendant l'année où la prime P_j est payée.

1. Modéliser ce problème par une chaîne de Markov, donner la matrice de transition et classifier les états.
2. Existe-t-il une unique probabilité stationnaire ? Quelle est sa signification ? Comparer ses valeurs.
3. Quel est le coût annuel moyen de cette police d'assurance ?

Exercice 4. **Evolution d'un taux de change sous contrainte**

Le marché du change du Yen coté à Paris est égal à X_0 ($\in \mathbb{N}$, exprimé en centimes d'euros). Le taux de change est laissé libre de fluctuations tant qu'il n'atteint pas deux valeurs prédéfinies m ou M, respectivement bornes inférieures et supérieures pour le taux de change. Sitôt que le taux de change atteint l'un de ces deux niveaux, la Banque Centrale intervient en achetant ou en vendant des Yens : quand le taux est trop bas elle achète des devises, et elle en vend quans il est trop haut.
Pour simplifier, nous supposerons que le taux fluctue sur un intervalle de 6 centimes ($M - m = 6$).
e taux de change évolue selon la règle suivante :

* Si le taux est entre les 2 bornes à l'instant $n-1$ ($X_{n-1} \in]m, M[$), alors à la période suivante $X_n = X_{n-1} + \xi_n$ où ξ_n est une v.a. de loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$.
* Lorsque le taux de change atteint une de ses bornes,
  $X_{n-1} = m \Rightarrow X_n = m + \theta$ avec θ v.a. de loi uniforme sur $\{0, 1\}$;
  $X_{n-1} = M \Rightarrow X_n = M + \zeta$ avec ζ v.a. de loi uniforme sur $\{0, -1\}$.

1. Modéliser ce problème par une chaîne de Markov. Donner sa matrice de transition.
2. Quelle est la nature de la chaîne ? Classifier les états.
3. Quelle est la prévision sur le taux de change à long terme ?
4. Quelle est la valeur la moins probable du taux de change ?
5. Quel est le temps moyen de retour à la borne supérieure ? à la valeur médiane ?