ISFA Semestre automne 2017-2018

Probabilités avancées - Master Econométrie et Statistique

TD 1

Construction d'une variable aléatoire

Exercice 1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.

1. Pour $A, B \in \mathcal{F}$ avec $A \cap B = \emptyset$, montrer que $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
2. Pour $A, B \in \mathcal{F}$, montrer que $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
3. Pour $A \in \mathcal{F}$, montrer que $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$.
4. Pour $A, B \in \mathcal{F}$, montrer que $\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Exercice 2. On lance deux dés équilibrés, l'un noir, l'autre rouge. On note N le résultat du dé noir et R le résultat du dé rouge.

1. Décrire l'espace des résultats possibles.
2. Quelle est la probabilité que l'on obtienne 2 sur l'un des deux dés et 3 sur l'autre ?
3. Calculer la probabilité de l'événement $(N = R)$.
4. Calculer $\mathbb{P}(N \leq R)$ et $\mathbb{P}(N + R \leq 5)$.

Exercice 3. (Chevalier de Méré (1607-1684))

1. Combien de fois faut-il lancer un dé pour que la probabilité d'obtenir un 1 soit supérieure ou égale à 1/2 ?
2. Est-il plus probable pour le Chevalier de Méré d'obtenir au moins une fois 1 en lançant 4 dés équilibrés que d'obtenir au moins une fois un double 1 en lançant 24 fois deux dés équilibrés ?

Exercice 4. Décrire la loi puis calculer l'espérance et la variance des lois usuelles suivantes :

1. loi de Bernoulli, loi Binomiale, loi de Poisson, loi géométrique ;
2. loi uniforme, loi exponentielle, loi normale.

Exercice 5. (Approximation de la loi de Poisson)
Soit P une variable aléatoire de loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. On pose $\lambda = np$ que l'on suppose fixé.

1. Montrer que
$$\mathbb{P}(k \text{ succès}) = \frac{\lambda^k}{k!}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \left\{ \left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right) \cdots \left(\frac{n-k+1}{n}\right) \right\}.$$
2. On fait tendre n vers $+\infty$ et p vers 0, de telle sorte que λ reste fixé. Montrer que
$$\mathbb{P}(k \text{ succès}) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

En pratique, en plus de n grand et p petit, l'approximation requiert que $\lambda \leq 20$.

Exercice 6. On définit la fonction F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$F : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x) + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[1,+\infty)}(x) + \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[2,+\infty)}(x)\,.$$

Soit $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité qui a F comme fonction de répartition.

1. Rappeler le lien entre $\mathbb{P}$ et F.
2. Calculer les probas des ensembles suivants :

$$A = (-1/2, 1/2), \quad B = (-1/2, 3/2), \quad C = (2/3, 5/2), \quad D = [0, 2), \quad E = (3, +\infty).$$

Exercice 7. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par :

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto x\mathbb{1}_{[0,1)}(x) + (2-x)\mathbb{1}_{[1.2]}(x)\,.$$

Soit $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité qui admet f comme fonction de densité et X une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}$.

1. Calculer la fonction de répartition de $\mathbb{P}$.
2. Calculer $\mathbb{P}(X \leq 1/2)$, $\mathbb{P}(X > 1/3)$ et $\mathbb{P}(1/4 \leq X \leq 5/4)$.
3. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 8. Soit $c \in \mathbb{R}$ et f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par :

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{c}{x^3}\mathbb{1}_{[1,+\infty)}(x)\,.$$

Soit $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité qui admet f comme fonction de densité et X une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}$.

1. Calculer c, puis la fonction de répartition de $\mathbb{P}$.
2. (a) Montrer que $\mathbb{E}[|X|] < +\infty$ mais que $\mathbb{E}[X^2] = +\infty$.
   (b) Calculer $\mathbb{E}[X]$.
3. Calculer les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(X \leq 2), \qquad \mathbb{P}(X = 4), \qquad \mathbb{P}(X^2 - 7X + 12 \leq 0).$$