ISFA Semestre automne 2017-2018

Probabilités Avancées - Master Econométrie et Statistiques

TD 2

Indépendance

Exercice 1.

1. Rappeler la définition de l'indépendance de deux événements, puis de deux variables aléatoires (de lois discrètes et de lois à densité).
2. Construire un exemple où $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$, mais X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 2. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, de lois géométriques de paramètres λ et μ respectivement. Montrer que $Z := \min(X, Y)$ est encore de loi géométrique et donner son paramètre.

Exercice 3. Soit $X, Y \in L^2$, d'espérance respective μ et ν. On définit la *covariance de* X *et* Y par :

$$\text{Cov}\,(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mu)(Y - \nu)]$$

1. Justifier que la covariance est bien définie (i.e. $< +\infty$).
2. Que vaut Cov (X, X) ?
3. Montrer que Cov $(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mu\nu$.
4. Montrer que si X et Y sont indépendantes, alors Cov $(X, Y) = 0$. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 4. On considère un couple (X, Y) de variables aléatoires à valeurs dans $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3, 4\}$ dont la loi conjointe est donnée par le tableau suivant :

X/Y	1	2	3	4
1	$4/50$	$2/50$	$8/50$	$6/50$
2	$2/50$	$1/50$	$4/50$	$3/50$
3	$4/50$	$2/50$	$8/50$	$6/50$

1. Déterminer les lois marginales de X et Y.
2. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi de $Z := \min(X, Y)$.
4. Calculer $\mathbb{P}(X - Y)$.

Exercice 5. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère un couple (X, Y) de variables aléatoires à valeurs dans $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$ dont la loi conjointe est donnée par le tableau suivant :

X/Y	0	1
0	a	$1/6$
1	b	$1/3$

1. Quelles conditions vérifient a et b pour que le tableau précédent soit celui d'une loi de probabilité ?
2. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que X et Y soient indépendantes.

Exercice 6. On considère (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} kx^2y \text{ si } (x, y) \in [-1, 1] \times [0, 1], \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer en fonction de k les densités marginales de X et de Y, puis calculer k.
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 7. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par :

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} ae^{-x-y} \text{ si } 0 \leq x \leq y, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer a pour que f soit la densité d'un couple de variables aléatoires (X, Y).
2. Déterminer les densités marginales.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 8. Soit le polynôme $Q(X) = X^2 - 2AX + B$ où A et B sont des variables aléatoires réelles indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. Donner la densité de la loi conjointe du couple (A, B).
2. Quelle est la probabilité que Q possède deux racines réelles distinctes ?
3. Quelle est la probabilité que Q possède une racine double ?
4. Quelle est la probabilité que Q possède deux racines complexes non réelles ?