TD 3

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES ET CALCULS D'ESPÉRANCE

Calculs de probabilités conditionnelles

Rappels

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité discret. On fera toujours l'hypothèse que $\mathbb{P}(\{\omega\}) \neq 0$ pour tout $\omega \in \Omega$. Si A et B sont deux sous-ensembles de Ω et si $\mathbb{P}(B) > 0$ (i.e. si $B \neq \emptyset$), on appelle *probabilité de A sachant B* la proba :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

On remarque que $\mathbb{P}(\cdot|B)$ définit une mesure de probabilité sur B.

Exercice 1.

1. Soit A et B deux événements tels que :

$$\mathbb{P}(A) = 3/8, \quad \mathbb{P}(B) = 1/2, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = 1/4.$$

   Déterminer $\mathbb{P}(\overline{A} \,|\, \overline{B})$.

2. Soit A et B deux événements indépendants tels que :

$$\mathbb{P}(A) = 1/2, \qquad \mathbb{P}(A \cup B) = 2/3.$$

   Déterminer $\mathbb{P}(\overline{B} \,|\, A)$.

3. Soit A, B et C trois événements indépendants deux à deux et tels que $\mathbb{P}(C) > 0$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A, B et C pour que A et B soient indépendants relativement à la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(\cdot|C)$.

Exercice 2. Un système est équipé d'un détecteur de panne. On a établi les constatations suivantes :

- S'il y a une panne, elle est détectée dans 99% des cas et l'alerte est donnée ;
- S'il n'y a pas de panne, l'alerte de détection se déclenche dans 5% des cas ;
- Une panne se produit dans 1% des cas.

1. L'alerte étant donnée, avec quelle probabilité peut-on affirmer qu'elle ne correspond pas à une panne ?
2. Si l'alerte n'est pas donnée, quelle est la probabilité qu'il y ait une panne ?

Exercice 3. Une commode à trois tiroirs T_1 , T_2 et T_3 contient des serviettes jaunes, bleues et vertes réparties de la manière suivante :

	T_1	T_2	T_3
J	2	3	4
B	3	2	4
V	3	1	2

1. On ouvre un tiroir au hasard et dans ce tiroir on choisit une serviette au hasard : elle est bleue. Calculer la probabilité que cette serviette provienne de T_1, de T_2 et de T_3.
2. On réunit toutes les serviettes et on en choisit une au hasard : elle est bleue. Calculer la probabilité que cette serviette provienne de T_1, de T_2 et de T_3.

Calculs d'espérance

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = 2^n$.
Calculer $\mathbb{E}[f(X)]$ pour une variable aléatoire X suivant les lois suivantes :

1. loi binomiale de paramètres n et p ;
2. loi géométrique de paramètre p (distinguer les cas selon la valeur de p) ;
3. loi de Poisson de paramètre λ.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \exp(x)$.
Calculer $\mathbb{E}[f(X)]$ pour une variable aléatoire X suivant les lois suivantes :

1. loi uniforme sur l'intervalle $[a; b]$;
2. loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ (distinguer les cas selon la valeur de λ) ;
3. loi normale d'espérance μ et de variance σ^2.