
TD 4

FONCTION QUANTILE, FONCTION CARACTÉRISTIQUE ET SOMME DE VARIABLES ALÉATOIRES

Fonction quantile

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire de densité f_X donnée par $f_X(x) = ax^2 \exp(-x^3)$ si $x \geq 0$, et $f_X(x) = 0$ sinon.

1. Calculer la fonction de répartition de X. En déduire la valeur de a.
2. Déterminer la médiane de X.
3. Calculer la fonction quantile de X.

Fonction caractéristique

Cours

Définition. *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Sa fonction caractéristique est la fonction*

$$\Phi_X : \begin{cases} \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \mathbb{E}[\exp(< it, X >)] \end{cases}$$

Si X est une variable aléatoire réelle, on a

$$\Phi_X : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \mathbb{E}[\exp(itX)] = \mathbb{E}[\cos(tX)] + i\mathbb{E}[\sin(tX)] \end{cases}$$

Si X est une variable aléatoire réelle de densité f_X on a alors $\Phi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) \exp(itx)dx$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Proposition. *Soit X et X' deux variables aléatoires réelles telles que $\Phi_X = \Phi_{X'}$.*
Alors X et X' ont même loi.

Proposition. *Soit X une variable aléatoire réelle qui admet un moment d'ordre k.*
Alors Φ_X est de classe $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et on a

$$\mathbb{E}[X^k] = (-i)^k \Phi_X^{(k)}(0).$$

Proposition. *Soit X une variable aléatoire réelle et $a, b \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a alors*

$$\Phi_{aX+b}(t) = \exp(itb)\Phi_X(at).$$

Exercice 2. Calculer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire suivant les lois suivantes :

1. loi de Bernoulli de paramètre p ;
2. loi binomiale de paramètres n et p ;
3. loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$;
4. loi uniforme sur $]-a, a[$, avec $a > 0$;
5. loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$;
6. loi de Dirac en $a \in \mathbb{R}$;
7. loi normale d'espérance μ et de variance σ^2, en utilisant le fait que celle de la loi normale centrée réduite est donnée par $\Phi_X(t) = e^{-t^2/2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. Soit $X = (X_1, ..., X_n)$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que les X_k sont indépendantes si et seulement si
$$\Phi_X(t_1, ..., t_n) = \Pi_{k=1}^n \Phi_{X_k}(t_k).$$
2. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ et $a \in \mathbb{R}^m$, alors
$$\Phi_{a+AX}(t) = e^{i<t,a>} \Phi_X(A^* t).$$
3. On suppose que les X_k sont des v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$ et on pose $Y_n = \sum_{k=1}^n X_k$.
   (a) Calculer $\Phi_{Y_n}(t)$.
   (b) Que vaut $\lim_{n\to+\infty} \Phi_{Y_n/n}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$? Que remarque-t-on ?
   (c) On pose $\lambda = np$ que l'on suppose fixé. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \Phi_{Y_n}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (quand $n \to +\infty$ et $p \to 0$ de telle sorte que λ reste constant). Que remarque-t-on ?
   (d) On pose
   $$Z_n = \frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}.$$
   Calculer $\Phi_{Z_n}(t)$ puis $\lim_{n\to+\infty} \Phi_{Z_n}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Que remarque-t-on ?
4. Reprendre la question 3. avec Z_i de loi uniforme sur $[-a, a]$ (en adaptant chaque question).

Somme de variables aléatoires

Exercice 4. Montrer que si $X_1, ..., X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes réelles, alors
$$\Phi_{S_n}(t) = \Pi_{k=1}^n \Phi_{X_k}(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$
où $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

Exercice 5. Soit X et X' deux variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson de paramètres λ et λ' respectivement. Quelle est la loi de $X + X'$?

Exercice 6. Soit N une variable aléatoire à valeurs entières positives. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a.i.i.d. et indépendantes de N. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $S_N = X_1 + \cdots + X_N$, avec la convention $S_N = 0$ si $N = 0$.

1. On suppose que $\mathbb{E}[N] < +\infty$ et $X \in L^1$. Montrer que

$$\Phi_{S_N}(t) = \mathbb{E}\big[\,(\Phi_{X_1}(t))^N\,\big]$$

   Indication : montrer d'abord que $\Phi_{S_N}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left[e^{itS_n}\mathbb{1}_{\{N=n\}}\right]$).

2. Montrer que

$$\mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}[N]\,\mathbb{E}[X_1]$$

   Indication : on rappelle que $\mathbb{E}[Z] = -i\Phi'_Z(0)$ si $Z \in L^1$.