TD 5

CONVERGENCE DE SUITE DE VARIABLES ALÉATOIRES ET LOI DES GRANDS NOMBRES

Différents types de convergence

Exercice 1. Soit (X_n) une suite de v.a.i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1. On pose pour tout $n \geq 2$,

$$Z_n = \frac{X_n}{\log n}.$$

1. Montrer que la suite (Z_n) converge en probabilité vers 0.
2. Qu'en est-il de la convergence L^1 ?
3. Qu'en est-il de la convergence L^2 ?

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n>0}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace de probabilités telle que, pour tout $n \geq 1$,

$$P(X_n = 0) = 1 - 1/n, \qquad P(X_n = n) = 1/n.$$

1. Étudier la convergence en loi de la suite (X_n).
2. Étudier la convergence en probabilité de la suite (X_n).
3. Étudier la convergence L^1 de la suite (X_n).
4. Étudier la convergence L^2 de la suite (X_n).

Exercice 3. Soit (X_n) une suite de v.a.i.i.d. de loi normale centrée réduite.

1. Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, quelle est la loi de $\frac{k}{n\sqrt{n}} X_k$?
2. Pour tout $n \geq 1$, on pose $Y_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} kX_k$.
   (a) Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, rappeler l'expression de la fonction caractéristique de $\frac{k}{n\sqrt{n}} X_k$.
   (b) Déterminer Φ_{Y_n} pour tout $n \geq 1$.
   Indice : on utilisera la formule $\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
   (c) Étudier la convergence en loi de la suite (Y_n).

Loi des Grands Nombres

Exercice 4.

1. Soit (X_n) une suite de v.a.i.i.d. dans L^1 d'espérance μ et (Y_n) une suite de v.a.i.i.d. dans L^1 d'espérance ν telle que $\nu \neq 0$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{j=1}^n X_j}{\sum_{j=1}^n Y_j} = \frac{\mu}{\nu} \quad \text{p.s.}$$

2. Soit (X_n) une suite de v.a.i.i.d. de loi normale d'espérance 1 et de variance 3. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{X_1 + \cdots + X_n}{X_1^2 + \cdots + X_n^2} = \frac{1}{4} \quad \text{p.s.}$$

3. Soit (X_n) une suite de v.a.i.i.d. de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Montrer que

$$Y_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{X_1^2 + \cdots + X_n^2}$$

   converge presque sûrement vers une constante que l'on précisera.

Exercice 5. Soit (X_n) une suite de v.a.i.i.d. dans L^1 d'espérance μ. On pose $Y_n = e^{X_n}$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que

$$\left(\Pi_{j=0}^n Y_j\right)^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{\mu} \text{ p.s.}$$