ISFA Semestre automne 2017-2018

Probabilités Avancées - Master Économétrie et Statistiques

TD 6

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev et Théorème Central Limite

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Exercice 1. Preuve de l'Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle qui admet une espérance μ et une variance σ^2. On veut montrer l'inégalité suivante, pour tout réel $\alpha > 0$:

$$\mathbb{P}(|X-\mu| \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2}.$$

1. Montrer l'Inégalité de Markov : si ϕ est une fonction croissante et positive sur $\mathbb{R}$ et Y est une variable aléatoire telle que $\phi(Y)$ a une espérance, alors pour tout réel b tel que $\phi(b) \neq 0$, on a :

$$\mathbb{P}(Y \geq b) \leq \frac{\mathbb{E}[\phi(Y)]}{\phi(b)}.$$

   Indice : utiliser le fait que $\phi(b)\mathbb{1}_{\phi(Y)\geq\phi(b)} \leq \phi(Y)$.

2. En déduite l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
   Indice : choisir judicieusement la variable Y et la fonction ϕ.

Exercice 2. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que pour tout réel $x > 0$:

$$\int_0^x e^{-t^2/2} dt \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right).$$

Exercice 3.

On souhaite tester un dé à six faces afin de savoir s'il est truqué. On s'intéresse en particulier à l'apparition du 6. Notons p la probabilité d'obtenir 6. Pour cela on lance $n \in \mathbb{N}$ fois le même dé.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $X_i = \mathbb{1}_{\text{le } i\text{-ème résultat est un } 6}$.

1. Donner la loi de la variable aléatoire qui compte le nombre de 6 obtenus.
2. On note F_n la fréquence d'apparition du 6. Exprimer F_n en fonction de $X_1, ..., X_n$, puis calculer son espérance et sa variance.
3. On suppose le dé non truqué. En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à F_n, déterminer un nombre de lancers de dé permettant d'affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à $0,05$, que la fréquence d'apparition du 6 au cours de ces lancers diffère de $1/6$ d'au plus $0,01$.

Théorème central limite

Exercice 4.

On reprend le cadre de l'exercice précédent. On suppose le dé non truqué.

1. Appliquer le théorème central limite à la suite $(X_n)_{n\geq 1}$.
2. Par quelle probabilité peut-on approcher $\mathbb{P}(|F_n - 1/6| \geq 0,01)$?
3. En utilisant cette approximation, reprendre la question 3. de l'exercice précédent.

Exercice 5.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Poisson de paramètre 1.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, rappeler quelle est la loi de $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.
   Indice : on pourra calculer la fonction caractéristique de S_n.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n^* = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$. Montrer que
   $$S_n^* \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} Z,$$
   où Z suit une loi normale centrée réduite.
3. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} \sum_{k=1}^{n} \frac{n^k}{k!} = 1/2$.

Exercice 6.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi uniforme sur $]-a, a[$, pour un réel $a > 0$.

1. Calculer la fonction caractéristique de X_n pour tout $n \geq 1$.
2. En déduire celle de $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
3. Montrer que
   $$n^{-1/2}\, S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} Z,$$
   où Z suit une loi normale centrée de variance $a^2/3$.