TD 7

Espérance conditionnelle

Cours

Soit X une variable alétoire réelle définie sur un espace de probabilités discret et Y une variable aléatoire définie sur le même espace de probabilités. Si X admet une espérance, on définit alors *l'espérance conditionnelle de X sachant Y* comme la variable aléatoire :

$$\mathbb{E}[X|Y] = \sum_y \frac{\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{\{Y=y\}}]}{\mathbb{P}(Y=y)} \mathbb{1}_{\{Y=y\}}.$$

Autrement dit pour tout ω dans l'univers de X et Y, on a

$$\mathbb{E}[X|Y](\omega) = \frac{\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{\{Y=Y(\omega)\}}]}{\mathbb{P}(Y=Y(\omega))}.$$

Si on note $\mathbb{E}_{Y=y}$ l'espérance sous la mesure de probabilité $\mathbb{P}(\cdot|Y=y)$, on a

$$\mathbb{E}[X|Y] = \sum_y \mathbb{E}_{Y=y}[X]\, \mathbb{1}_{\{Y=y\}}.$$

Exercices

Exercice 1. Martingale de Doob

On se place sur l'espace de probabilités discret $(\Omega, \mathbb{P})$, avec $\Omega = \in [\![1;8]\!]$ et $\mathbb{P}$ la mesure uniforme sur Ω. On pose : $X_0 = \mathbb{1}_\Omega$, $\quad X_1 = \mathbb{1}_{\{1,2,3,4\}}$, $\quad X_2 = \mathbb{1}_{\{1,2\}} + 2\mathbb{1}_{\{3,4\}} + 3\mathbb{1}_{\{5,6\}}$, $\quad X_3 = \sum_{\omega\in\Omega} \omega \mathbb{1}_{\{\omega\}}$.

1. Pour tout $i \in [\![0;3]\!]$, déterminer $Y_i := \mathbb{E}[X_3|X_i]$.
2. Montrer que pour tout $i \in [\![0;2]\!]$, on a $\mathbb{E}[Y_{i+1}|Y_i] = Y_i$.
   On appelle (Y_i) la *martingale de Doob* de X.
3. On suppose maintenant que la probabilité $\mathbb{P}$ est définie par $\mathbb{P}(\omega_i) = 1/9$ pour $i = 1,2,3,6,7,8$ et $\mathbb{P}(\omega_i) = 1/6$ pour $i = 4,5$. Construire à nouveau Y avec ces nouvelles probabilités.

Exercice 2. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur le même espace de probabilités discret.

1. Montrer que $\mathbb{E}[X|X] = X$.
2. Montrer que $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}[X]$.
3. Soit f une fonction.
   (a) Montrer que $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|f(Y)]|Y] = \mathbb{E}[X|f(Y)]$.
   (b) Montrer que $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]|f(Y)] = \mathbb{E}[X|f(Y)]$.

Exercice 3. On considère une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$, et une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $(C_i)_{i\geq 1}$, indépendantes de N. On pose $Y = \sum_{i=1}^N C_i$.
Déterminer $\mathbb{E}[Y|N]$, puis $\mathbb{E}[Y]$.