Analyse IV, TD 1

Révisions sur les séries numériques et les suites de fonctions

$\sim 4h$, - séries à paramètres
- critère des séries alternées, majoration du reste
- comparaison série / intégrale
- suites de fonctions

1. Séries numériques

Ex 1 : a) $u_n = \frac{n}{n^2+1} \sim \frac{1}{n}$ donc diverge (Riemann)

b) $u_n = \frac{ch(n)}{ch(2n)} = \frac{e^n + e^{-n}}{e^{2n}+e^{-2n}} = \frac{1+e^{-2n}}{e^n + e^{-3n}} \sim e^{-n}$ donc converge

c) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{n}\left(\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-1/2} - \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \right)$

$= \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} - \left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

$= \frac{1}{n^3}\left(1+o(1)\right) \sim \frac{1}{n^3}$ donc converge

d) $u_n = e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e - \exp\left(n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$

$= e - \exp\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

$= e\left(1-\exp\left(-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = e/_{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{e}{2n}$, diverge.

Ex 2 $\max(u_n, v_n)$, $\sqrt{u_n v_n}$ et $\frac{u_n v_n}{u_n+v_n}$ sont >0, donc il suffit de majorer ces termes par le terme général d'une série convergente pour conclure.

a) $\max(u_n, v_n) \leqslant u_n + v_n$

b) $\sqrt{u_n v_n} \leqslant \frac{1}{2}(u_n+v_n)$

c) $\frac{u_n v_n}{u_n+v_n} \leqslant u_n$ (et aussi $\frac{u_n v_n}{u_n+v_n} \leqslant v_n$)

Ex 3 a) $u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n+1}\right)$ $\quad u_{2n} > 0$, $u_{2n+1} < 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$|u_n| = \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$|u_n| - |u_{n+1}| = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) - \ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right) = \ln\left(\frac{(n+2)^2}{(n+1)(n+3)}\right) = \ln\left(\frac{(n+2)^2}{(n+2)^2-1}\right) > 0$

critère des séries alternées : $\sum u_n$ CV.

(par contre, $\sum |u_n|$ DV)

b) $u_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$

$\sqrt{n^2+n+1} = n\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = n\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{8}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

donc $u_n = \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{3}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ lorsque $n \to +\infty$

$= (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{3}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{3(-1)^{n+1}}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

On vérifie alors que le critère des séries alternées s'applique, et on en déduit que $\sum u_n$ est semi-convergente.

$\boxed{\text{Ex 4}}$: $u_n = \dfrac{(-1)^n 8^n}{(2n)!}$

1. $|u_n| = \dfrac{8^n}{(2n)!} \leqslant \dfrac{8^n}{n!}$ qui converge (exp.)

ou alors critère de d'Alembert $\Rightarrow \sum u_n$ CV absolument

2. Série alternée $\Rightarrow$ $|R_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leqslant |u_{n+1}|$

3. $|R_1| \leqslant |u_2|$, donc, comme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = u_0 + u_1 + R_1$, on en déduit que

$$u_0 + u_1 - |u_2| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \underbrace{u_0 + u_1 + |u_2|}_{= 1 - 4 + \frac{64}{24} < 0}$$

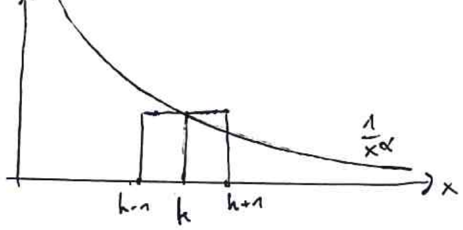
$\boxed{\text{Ex 5}}$: $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} \sim \dfrac{1}{n^3}$, série CV. (Riemann)

Décomposition en éléments simples : $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n+2}$

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} = c \\ b = -1. \end{cases}$$

donc
$$\sum_{n=1}^{m} u_n = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{m+1}\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{m+2}\frac{1}{n} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{m+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2}\right)$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\frac{1}{(m+1)(m+2)} \xrightarrow[m \to +\infty]{} \frac{1}{4}.$$

$\boxed{\text{Ex 6}}$: 1. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.



$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

donc
$$\underbrace{\int_1^{n+1} x^{-\alpha}\,dx}_{= \frac{1}{1-\alpha}\left((n+1)^{1-\alpha} - 1\right)} \leqslant S_n \leqslant \underbrace{\int_0^{n} x^{-\alpha}\,dx}_{= \frac{1}{1-\alpha}\left(n^{1-\alpha}\right)}$$

$$\frac{1}{1-\alpha}\left((n+1)^{1-\alpha} - 1\right) \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{1-\alpha}\left(n^{1-\alpha}\right)$$

Or, $\dfrac{1}{1-\alpha}\left((n+1)^{1-\alpha} - 1\right) \sim \dfrac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, donc $S_n \sim \dfrac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

2. $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, $\alpha > 1$.

Comme avant, $\int_{n+1}^{+\infty} x^{-\alpha} dx \leq R_n \leq \int_{n}^{+\infty} x^{-\alpha} dx$

donc $\frac{(n+1)^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \leq R_n \leq \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$

et $R_n \sim \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$.

$\boxed{\text{Ex } 7}$: a) $u_n = e^{-n^\alpha}$

* $\alpha \leq 0 \Rightarrow u_n \geq u_1 = e^{-1} > 0$, la série diverge grossièrement
* $\alpha > 0 \Rightarrow u_n \leq C_\beta \left(\frac{1}{n^\alpha}\right)^\beta \ \forall \beta$, donc la série converge.

b) $u_n = \frac{\ln(n)}{n^\alpha}$

* $\alpha \leq 1, \Rightarrow u_n \geq \frac{1}{n}$ (pour $n \geq 2$), donc la série diverge.
* $\alpha > 1 \Rightarrow$ soit $\gamma \in]1; \alpha[$, $\left|\frac{\ln(n)}{n^{\alpha-\gamma}}\right| \leq C$

et donc $u_n \leq \frac{C}{n^\gamma}$ et la série converge (Riemann)

c) $u_n = \exp(-(\ln(n))^\alpha) = \exp(-\ln(n) \ln(n)^{\alpha-1})$
$= \left(\frac{1}{n}\right)^{\ln(n)^{\alpha-1}}$

* $\alpha \leq 1 \Rightarrow u_n \geq \frac{1}{n} \Rightarrow$ diverge
* $\alpha > 1 \Rightarrow |u_n| \leq \frac{1}{n}^{\ln(N)^{\alpha-1}}$ pour $n \geq N$,

il suffit de choisir N tq $\ln(N)^{\alpha-1} > 1$ pour conclure que la série converge.

d) $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$

* $\alpha = 0$: terme général mal défini
* $\alpha > 0 \Rightarrow u_n \sim \frac{1}{n^\alpha} \Rightarrow$
  * $\alpha > 1$: convergence
  * $0 < \alpha \leq 1$: divergence
* $\alpha < 0 \Rightarrow u_n \sim 1 \Rightarrow$ divergence grossière.

$\boxed{\text{Ex } 8}$: On reconnaît un produit de Cauchy:

$w_n = (n+1) 3^{-n} = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k$ avec $u_{n-k} = 3^{-(n-k)}$, $v_k = 3^{-k}$

$\sum u_n = \sum v_n$ convergent absolument, $\sum u_n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

d'où $\sum_{n \geq 0} w_n = \left(\sum u_n\right)\left(\sum v_n\right) = \frac{9}{4}$

II. Suites de fonctions

$\boxed{\text{Ex 9}}$: $f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

1. $f_n(0) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \to +\infty$, $x \neq 0$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

2. f_n est paire et décroissante sur $[0;+\infty[$.

Ainsi, ~~sup~~ si $a > 0$,

$$\sup_{x\in]-\infty;-a]\cup[a;+\infty[} |f(x)| = \sup_{x\in[a;+\infty[} f(x) = f(a) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2a^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $f_n \xrightarrow{CVU} 0$ sur $]-\infty;-a]\cup[a;+\infty[$.

3. Pour $n > \sqrt{\pi}$, on pose $x_n = \frac{1}{n}\sqrt{\ln\left(\frac{n}{\sqrt{\pi}}\right)} > 0$, de telle sorte que $f_n(x_n) = 1$. Alors

$$\sup_{x\in]0;+\infty[} |f_n(x)| \geq f_n(x_n) = 1$$

donc $f_n \overset{CVU}{\not\to} 0$ sur $]0;+\infty[$.

$\boxed{\text{Ex 10}}$: $f_n(x) = (x^2+1)\frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$, $x \in [0;1]$

1. $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \underbrace{(x^2+1)e^x}_{=: f(x)}$ simplement

$$\sup_{x\in[-1;1]} |f_n(x) - f(x)| = ?$$

$$\left|(x^2+1)\frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} - (x^2+1)e^x\right|$$

$$= (x^2+1)\left|\frac{ne^x+xe^{-x}}{n+x} - \frac{ne^x+xe^x}{n+x}\right|$$

$$= (x^2+1)|x|\left|\frac{e^{-x}+e^x}{n+x}\right| \leq 2|2\,\mathrm{ch}(x)|\frac{1}{n}$$

$$\leq \frac{4\,\mathrm{ch}(1)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $f_n \xrightarrow{CVU} f$.

2. Comme on a la CVU, on a directement : (cours)

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x^2+1)e^x dx$$

$$= \int_0^1 x^2e^x dx + [e^x]_0^1$$

$$= [x^2e^x]_0^1 - \int_0^1 2xe^x dx + e - 1$$

$$= e + e - 1 - 2[xe^x]_0^1 + 2\int_0^1 e^x dx$$

$$= -1 + 2(e-1) = 2e - 3$$

$\boxed{\text{Ex } 11}$: $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ C^0,

$$f_n(x) = \frac{f(x)}{1+n^2x^2}, \quad x \in [0,1]$$

1. $f(x) = x$, $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$,

$$f_n'(x) = \frac{(1+n^2x^2) - 2n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$$

$$= \frac{1-n^2x^2}{(\dots)^2}$$

	0		x_n		1
f_n'		$+$	0	$-$	
f_n		$\nearrow$		$\searrow$	

$x_n = \dfrac{1}{n}$

Ainsi : $\|f_n\|_\infty = f_n(x_n) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, d'où $f_n \xrightarrow{CVU} 0$.

2. f qcq. On suppose que $f_n \xrightarrow{CVU} g$ sur $[0;1]$. Alors, en particulier, $f_n \xrightarrow{CVS} g$ sur le même intervalle.
Soit $x \in]0;1]$. $f_n(x) = \dfrac{f(x)}{1+n^2x^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 = g(x)$, donc $g \equiv 0$ sur $]0;1]$.
Comme g est la limite uniforme de fonctions continues, elle est aussi C^0, d'où $g(0) = 0$. Or, $f_n(0) = f(0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} g(0)$, donc $f(0) = 0$.

$\boxed{\text{Ex } 12}$: $\displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos(x)\,dx$

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1-\frac{x}{n}\right)\right) \leq \exp\left(n\left(-\frac{x}{n}\right)\right) = \exp(-x) \quad \forall x \in [0;n]$$

donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\left|\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \cos(x) \chi_{[0;n[}(x)\right| \leq \exp(-x)$ intégrable

alors, d'après le théorème de CVD :

$$\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \cos(x)\,dx \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(x)\,dx = \underline{I}.$$

$$\underline{I} = \left[-e^{-x}\cos(x)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-x}\sin(x)\,dx$$

$$= 1 - \left(\left[-e^{-x}\sin(x)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(x)\,dx\right)$$

$$= 1 - \underline{I} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{1}{2}.$$