TD 7 - Calcul différentiel

Ex 1 : Soit $M, H \in M_n(\mathbb{R})$, $(M+H)^2 = M^2 + \underbrace{HM + MH}_{\in (M_n(\mathbb{R}))'} + \underbrace{H^2}_{= o(\|H\|)}$

donc $f : M \mapsto M^2$ est différentiable, et

$df(M)(H) = MH + HM$.

Ex 2 : 1. $f_1 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $f_1(x+h) = \frac{1}{x+h} = \frac{x-h}{x^2-h^2} = \frac{x}{x^2-h^2} - \frac{h}{x^2-h^2} = \frac{1}{x} - \frac{h}{x^2} + o(h)$

donc f_1 est dif. partout, et

$df_1(a)(h) = -\frac{h}{a^2}$

2. $f_2 : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{z}$, $f_2(z+h) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{h}{z}} = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{h}{z} + o\left(\frac{h}{z}\right)\right) = \frac{1}{z} - \frac{h}{z^2} + o(h) \Rightarrow$ idem.

3. $f_3 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto Re(z)$ $\quad f_3(z+h) = f_3(z) + f_3(h)$ donc $df_3(a)(h) = f_3(h)$.

Ex 3 : 1. Pour $(i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]$, on note $c_{ij} = \|\varphi(e_i, f_j)\|_G$.

Alors, si $(x,y) \in E \times F$, $\|\varphi(x,y)\|_G = \|\varphi(\sum x_i e_i, \sum y_j f_j)\|_G$

$= \|\sum_{i,j} x_i y_j \varphi(e_i, f_j)\|_G \leq \sum_{i,j} |x_i||y_j| c_{ij}$

$\leq np \sup_{i,j}(c_{ij}) \|(x,y)\|^2$

(ici, $\|(x,y)\| = \max(\sup|x_i|, \sup|y_j|)$)

2. $\varphi(x+h, y+k) = \varphi(x,y) + \underbrace{\varphi(x,k) + \varphi(h,y)}_{\downarrow} + \underbrace{\varphi(h,k)}_{= o(\|(h,k)\|)}$

d'où $d\varphi(x,y)(h,k) = \downarrow$

Ex 4 : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} \\ 0 \text{ en } 0 \end{cases}$

Soit $(x,y) \neq 0$, alors $\frac{f(tx,ty) - f(0,0)}{t} = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

$\xrightarrow[t \to 0]{} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

donc dif. dans toutes les directions.

f différentiable en $0 \Rightarrow \partial_{(x,y)} f(0) = df(0)(x,y)$, en particulier,

$(x,y) \mapsto \partial_{(x,y)} f(0)$ est linéaire

ce qui n'est pas le cas :

$\partial_{(0,1)} f(0) = 0 = \partial_{(1,0)} f(0)$, $\quad \partial_{(1,1)} f(0) \neq 0$.

Ex 5

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x^2y - y^3}{x^2+y^2} \\ 0 \text{ à } 0 \end{cases}$$

1. ~~sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$, $\partial_x f$ et $\partial_y f$ existent, et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy(x^2+y^2) - (x^2y-y^3)(2x)}{(x^2+y^2)^2}$~~

$$= \frac{\cancel{2x^3y} + 2xy^3 - \cancel{2x^3y} + 2xy^3}{(x^2+y^2)^2} = 4\frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(x^2-3y^2)(x^2+y^2) - (x^2y-y^3)(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4 + x^2y^2 - 3x^2y^2 - 3y^4 - 2x^2y^2 + 2y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^4 - 4x^2y^2 + y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

~~en $(0,0)$,~~ inutile

si elles existent, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - 0}{y} = -1$$

2. On voit, pour $v = (1,1)$, que $\partial_v f(0) = 0$, et donc $v \mapsto \partial_v f$ n'est pas linéaire.

Ex 6 :

E, F des $\mathbb{R}$-ev, $f : E \longrightarrow F$ diff

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $J_f(x) = f'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x)$
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$, $J_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x} \end{pmatrix}_{p \times 1}$
3. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $J_f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$
4. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $J_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

Ex 7 :

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\ 0 \quad \text{en } 0. \end{cases}$$

1. $f(x,y) = O(\|(x,y)\|^2)$, donc f est diff. en 0 et $df(0,0) = 0$
2. $f(x,0) = x^2 \sin\left(\frac{1}{|x|}\right)$, à droite, $\partial_x f(x,0) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ pas de limite en $(0,0)$, donc f n'est pas C^1 en $(0,0)$

Ex 8 :

$$\det : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$A \longmapsto \det(A).$$

1. $M = \sum m_{ij} E_{ij}$, $\det(M) = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}$

$$\frac{\partial \det}{\partial x_{11}} = m_{22}, \quad \frac{\partial \det}{\partial x_{22}} = m_{11}, \quad \frac{\partial \det}{\partial x_{12}} = -m_{21}, \quad \frac{\partial \det}{\partial x_{21}} = -m_{12}$$

2. Les dérivées partielles sont $C^0 \Rightarrow \det$ est C^1.

$$D\det(A)(H) = A_{11}h_{22} + A_{22}h_{11} - A_{12}h_{21} - A_{21}h_{12}$$

Ex 9 : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right) \\ 0 \text{ en } 0 = x. \end{cases}$

1. f est C^0.
2. sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y), y \in \mathbb{R}\}$: OK

Si $x = 0$, alors

$f(0, y+t) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 0$.

$$\frac{f(t,y)}{t} = \frac{t^2 \sin\left(\frac{y}{t}\right)}{t} = t\sin\left(\frac{y}{t}\right) \xrightarrow[t \to 0]{} 0, \text{ donc } \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = 0.$$

3. Si $x \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin\left(\frac{y}{x}\right) - y\cos\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$ et aussi en $(0,0)$.

par contre, pas de limite lorsque $y \neq 0$ et $x = 0$.

$\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

4. f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$. Quid de $(0,y)$, $y \in \mathbb{R}$?

$f(h, y+k) = O(h^2)$ donc diff. et de différentielle 0.

$x \neq 0 \Rightarrow$

$$Df(x,y)(h,k) = \left(2x\sin\left(\frac{y}{x}\right) - y\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right)h + x\cos\left(\frac{y}{x}\right)k.$$

Ex 10 : 1. $(x,y) \mapsto f(x,y)$ est diff. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$u : x \mapsto f(x,-x)$ est diff. comme composée de fonctions diff.

1. $Du(x)(h) = D(f \circ g)(x)(h)$ $\quad g : x \mapsto (x,-x)$

$= Df(g(x)) \circ Dg(x)(h)$ $\quad Dg(x) = (1,-1)$

$\quad Df(x) \circ$

$= Df(x,-x)(h,-h)$

$= \frac{\partial f}{\partial x}(x,-x) \cdot h - \frac{\partial f}{\partial y}(x,-x)h = h\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,-x) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,-x)\right)$

$u'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,-x) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,-x)$

$= Df(x,-x)(h,-h)$

$v : (x,y) \mapsto f(y,x)$, $\quad Dv(x,y)(h,k) = Df(y,x) \circ \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}\right)$

$= Df(y,x)(k,h)$

2. $f : E \to F$ différentiable, $U \subset E$ ouvert

$a \in U$, $v \in E$

$$g(t) = f(a+tv) \quad , \quad g(0) = f(a) , \quad \frac{g(t)-g(0)}{t} = \frac{Df(a)(tv)}{t} + o(1)$$

$$\xrightarrow[t \to 0]{} Df(a)(v)$$

$\boxed{\text{Ex 11}}$: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h : (x,y) \mapsto f(x+g(x,y))$ diff. comme composée

$$Dh(x,y) = Df(x+g(x,y)) \circ Dg(x,y)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \left(1 + \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right) f'(x+g(x,y))$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) f'(x+g(x,y))$$

$\boxed{\text{Ex 12}}$: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \int_0^{e^{xy}} \sin(t^2)\,dt$

$u : s \mapsto \int_0^s \sin(t^2)\,dt$ est C^∞

$v : (x,y) \mapsto e^{xy}$ est C^∞

} $f = u \circ v$ est C^∞

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\, u'(v(x,y)) = y e^{xy} \sin(e^{2xy})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x e^{xy} \sin(e^{2xy})$$

$\boxed{\text{Ex 13}}$: $f : E \to \mathbb{R}$, $\lambda : E \to \mathbb{R}$

$g = \lambda f$, g est diff. et

$$Dg(x)(h) = \lambda(x) Df(x)(h) + D\lambda(x)(h) f(x).$$

$\boxed{\text{Ex 14}}$: $f : U \to \mathbb{R}$ C^1 sur U ne s'annule pas, est C^1

$U \subset \mathbb{R}^n$.

$g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ est C^∞, et donc $\frac{1}{f}$ est C^1 par composition, et donc

$$D\left(\frac{1}{f}\right)(x) = D(g \circ f)(x) = -\frac{1}{f(x)^2} Df(x)$$