

Feuille d'exercices n° 8

EXTREMA

Exercice 1. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = e^{x^2+xy+y^2}$. Justifier l'existence et déterminer le développement de Taylor à l'ordre 2 de f au voisinage du point $(0, 0)$.

Exercice 2. On définit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x, y) = x^3 + xy^2 - 2x^2 + 2$.

1. Vérifier que si D est une droite passant par $(0, 0)$, la restriction de f à D possède un maximum local à l'origine.
2. Déterminer si $(0, 0)$ est un point de maximum local de f .

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + x^2y^2 - x^4 - y^4$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Déterminer les extrema locaux de f .
2. A l'aide des coordonnées polaires, vérifier que $f(x, y) \leq 2r^2 - \frac{r^4}{4}$, où $r^2 = x^2 + y^2$. En déduire que $f(x, y) \leq 4$.
3. Trouver le maximum global de f et les points où il est atteint.
4. Y a-t-il un minimum global ?

Exercice 4. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = (x^2 + y^2)y + x^2 + 9y^2$.

1. Déterminer les points critiques de f et déterminer leur nature.
2. Sur \mathbb{R}^2 , la fonction f admet-elle des extrema globaux ? On pourra utiliser $f(0, t)$.
3. On définit les ensembles $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.
 - (a) Justifier que f possède sur D des extrema globaux.
 - (b) Sur le cercle C , déterminer les valeurs minimales et maximales prises par f .
 - (c) En déduire les valeurs minimales et maximales prises par f sur le disque D .

Exercice 5. Déterminer les bornes de la fonction $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x, y) = 3xy - 3x^2 - y^3$$

sur le compact $K = [-1, 1] \times [-1, 1]$.

Exercice 6. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2mxy + y^4 - 2x^2y^2$.

1. Vérifier que $O(0, 0, 0)$ est un point critique de f .
2. Étudier, suivant les valeurs du réel m , si O est un extremum local de f .

Exercice 7. Soit ABC un triangle. Déterminer le point M qui minimise la distance $AM^2 + BM^2 + CM^2$.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - y^2 - 1$. Étudier les extrema relatifs de f sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 9. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = e^{x-y} + xy^2$, puis S la surface d'équation $z = f(x, y)$. Déterminer une équation du plan tangent P à S au point $(1, 1, 2)$, puis la position relative de S et de P au voisinage de $(1, 1, 2)$.