Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2016-2017

Math IV - PMI - Analyse

Feuille d'exercices n° 9

Équations différentielles

Exercice 1. Résoudre l'équation différentielle $xy'' + (x-2)y' - 2y = 0$, d'inconnue $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I, sur tout intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. On pourra chercher une solution particulière polynomiale et une solution particulière de la forme $x \longmapsto e^{ax}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Résoudre l'équation différentielle suivante : (E) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$, d'inconnue $y :] - \pi/2; \pi/2[\to \mathbb{R}$, deux fois dérivable.

Exercice 3. On considère l'équation différentielle $(E)\quad xy'' - 2(x-1)y' + (x-2)y = xe^x$, d'inconnue $y :]0; +\infty[\to \mathbb{R}$ deux fois dérivable. Résoudre (E) par trois méthodes :

1. à l'aide du changement de fonction inconnue $z = e^{-x}y$,
2. à l'aide du changement de fonction inconnue $u = y' - y$,
3. en cherchant des solutions particulières de l'équation différentielle sans second membre associée à (E) sous la forme $x \longmapsto x^\alpha e^x$, où $\alpha \in \mathbb{Z}$ est une constante à choisir, puis en appliquant la méthode de variation des constantes.

Exercice 4. Résoudre l'équation différentielle suivante (E) : $(1-x^2)y'' - xy' + y = 0$, d'inconnue $y :] - 1; 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable, à l'aide du changement de variable défini par $t = \arcsin(x)$.

Exercice 5. Méthode de Lagrange (aussi appelée méthode d'abaissement de l'ordre)
Résoudre l'équation différentielle suivante (E) : $x^2(x+1)y'' - x(x^2+4x+2)y' + (x^2+4x+2)y = 0$, d'inconnue $y :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable.

Exercice 6. Résoudre l'équation différentielle suivante (E) : $x(x^2-1)y'' - 2(x^2-1)y' + 2xy = 0$, d'inconnue $y :]1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable, sachant qu'il existe une solution polynômiale autre que la fonction nulle.

Exercice 7. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $p, q : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On considère deux solutions u et v de l'équation différentielle (E) : $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$.

1. Montrer que le Wronskien de u et v (noté W) vérifie une équation différentielle et le calculer en fonction de sa valeur en un point a de I.
2. On suppose que u ne s'annule pas sur I. Exprimer W à l'aide d'une dérivée. Expliquer comment obtenir v à l'aide de W et u.

3. Application : On considère l'équation différentielle $x^2y'' - x(2+x)y' + (x+2)y = 0$ d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable.

   (a) Déterminer une solution polynômiale de (E).

   (b) À l'aide du Wronskien, déterminer une deuxième solution de (E) sur $I_1 =]-\infty; 0[$ et sur $I_2 =]0; +\infty[$.

   (c) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable vérifiant $f + f'' \geq 0$.
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f(x+\pi) \geq 0$.
Indication : faire apparaître une équation différentielle linéaire non homogène du second ordre dont f est solution.