$\boxed{\text{TD10}}$: Continuité et dérivabilité

$\boxed{\text{Ex 1}}$: $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a<b$, $x_0 \in]a,b[$, $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue en x_0 et $f(x_0) > 0$.

Soit $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$. Comme f est continue en x_0, $\exists \delta$ tq

$$\forall x \in]a,b[, \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$
$$\Rightarrow -(f(x) - f(x_0)) \leq \frac{f(x_0)}{2}$$
$$\Rightarrow f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2} > 0$$

Ainsi, si on note $I =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap]a,b[$,

$\forall x \in I$, $f(x) > 0$.

$\boxed{\text{Ex 2}}$: 1. $f : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x-1 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

f est continue sur $[0;1[$, ~~et~~ ~~notre~~ et à gauche en 1 par continuité de $x \longmapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$.

f est aussi continue sur $]1;2[$, car $x \mapsto 2x-1$ l'est.

Il suffit donc de tester la limite de f à droite en 1 :

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2x - 1 = 1 = f(1)$$

donc f est continue sur $[0;2]$.

2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} x + \frac{\sqrt{x^2}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

f est continue sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$ par composition de fonctions continues.

Si $x \neq 0$, $\frac{\sqrt{x^2}}{x} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Par conséquent,

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x + 1 = 1 = f(1)$, f est continue à droite en 1.

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x - 1 = -1$, f est discontinue en 1.

3. $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} xE\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

E est continue sur les intervalles $]n; n+1[$ $\forall n \in \mathbb{Z}$, et à droite en n.

De plus, si $n \in \mathbb{N}^*$, l'image par $g : x \longmapsto 1/x$ de l'intervalle $\left]\frac{1}{n+1} ; \frac{1}{n}\right[$ est $]n ; n+1[$, et l'image par g de $]1 ; +\infty[$ est $]0, 1[$. Par conséquent, comme g est continue, on en déduit que f est continue sur les intervalles

$$\left]\frac{1}{n+1} ; \frac{1}{n}\right[, \ n \in \mathbb{N}^*, \text{ et aussi sur }]1 ; +\infty[.$$

$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{n}\right)^+} f(x) = \lim_{x \to \left(\frac{1}{n}\right)^+} x\, E\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{n} \lim_{x \to \left(\frac{1}{n}\right)^+} E\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{n} \lim_{y \to n^-} E(y)$$

$$= \frac{1}{n}(n-1)$$

$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{n}\right)^-} f(x) = \frac{1}{n} \lim_{y \to n^+} E(y) = 1 = f\left(\frac{1}{n}\right)$$

donc f est continue à gauche en $\frac{1}{n}$, mais discontinue

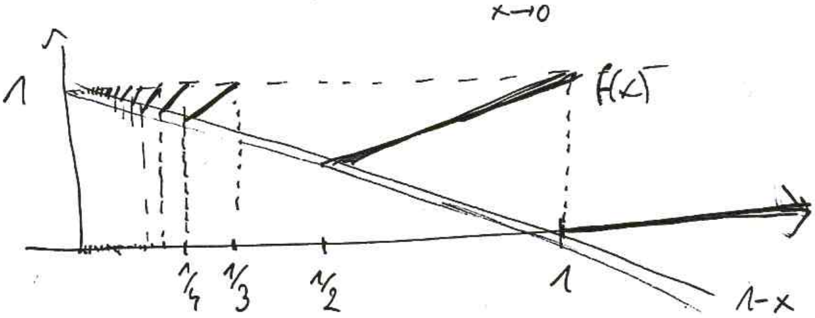
Il reste à tester la continuité de f en 0 :

$$\forall y > 0, \quad y - 1 < E(y) \leq y$$

et donc $\forall x > 0, \ \frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow 1 - x < f(x) \leq 1$$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$, donc f est continue en 0.



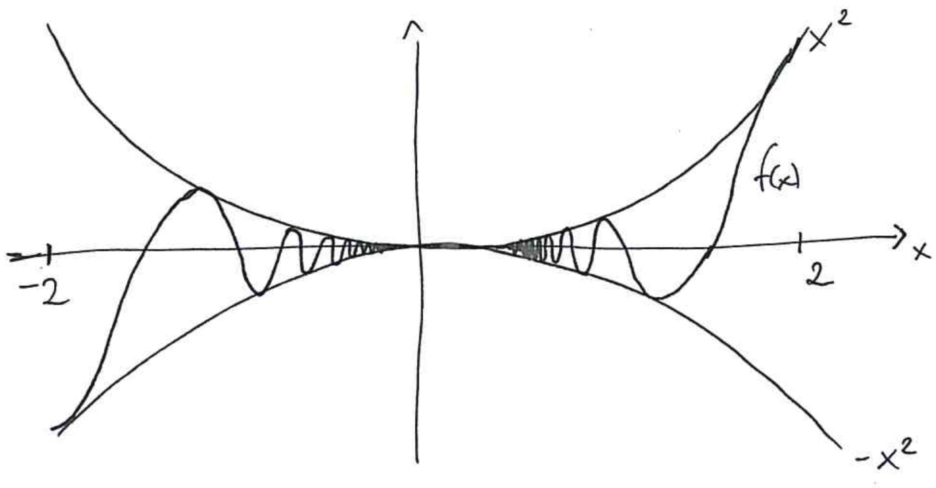
4. $f : [-2 ; 2] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

f est continue sur $[-2;0[$ et $]0;2]$ par composition. De plus,

$|f(x)| \leq |x^2| \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, donc f est continue en 0.

Elle est donc continue sur $[-2 ; 2]$



$\boxed{\text{Ex 3}}$: 1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et tq $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

Soit $y \in \mathbb{R}$. Il existe $A \in \mathbb{R}$ tq $x \geqslant A \Rightarrow f(x) \geqslant y$

et $B \in \mathbb{R}$ tq $x \leqslant B \Rightarrow f(x) \leqslant y$

par conséquent, il existe $a \leqslant b \in \mathbb{R}$ tq $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$.

D'après le TVI, il existe $c \in [a,b]$ tq $f(c) = y$, et donc f est surjective.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair et soit $\tilde{P} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction polynomiale associée. Quitte à considérer $-P$, on peut supposer que le coefficient dominant de P est > 0. Mais alors $\tilde{P}$ est continue, et $\tilde{P}(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$, et $\tilde{P}(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$. Les résultats de la question 1 s'appliquent : $\tilde{P}$ est surjective, et en particulier, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tq $\tilde{P}(\alpha) = 0$, donc α est une racine réelle de P.

3. $P = 1$ n'admet aucune racine réelle.

$\boxed{\text{Ex 4}}$: On considère $f : [\frac{3\pi}{4}, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \tan(x) + \frac{x}{3}$

f est continue sur $[\frac{3\pi}{4}, \pi]$, et $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)} + \dfrac{\pi}{4}$

$= \dfrac{1/\sqrt{2}}{-1/\sqrt{2}} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} - 1 < 0$

$f(\pi) = 0 + \frac{\pi}{3} > 0$.

D'après le TVI, $\exists\, x \in [\frac{3\pi}{4}, \pi]$ tq $f(x) = 0$.

$\boxed{Ex\,5}$: 1. $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f([0,1]) \subset [0,1]$ et f est continue.

$$g : \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) - x \end{array}$$ est continue, et $g(0) = f(0) \geq 0$
$g(1) = f(1) - 1 \leq 0$

donc d'après le TVI, $\exists\, x \in [0,1]$ tq $g(x) = 0$
et donc $f(x) = x$.

2. $g : [0,1] \to [0,1]$, $\forall x,y \in [0,1]$, $x \neq y \Rightarrow |g(x) - g(y)| < |x-y|$.
Par conséquent, $\forall x,y \in [0,1]$, $|g(x)-g(y)| \leq |x-y|$, g est lipschitzienne, et donc continue. D'après 1., g admet un point fixe. Supposons que g admette deux points fixes $x \neq y$. Alors $|x-y| = |g(x)-g(y)| < |x-y|$, c'est exclu. On en conclut que g admet un unique point fixe.

$\boxed{Ex\,6}$: 1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et périodique : il existe $T > 0$ tq $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$. Alors, f est bornée sur $\mathbb{R}$ ssi elle est bornée sur $[0,T]$. Or, f est continue sur $[0,T]$, et donc y est bornée et atteint ses bornes d'après le th. du maximum.

2. Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sin^8(x) + \cos^{14}(x). \end{array}$

f est continue et ~~borné~~ 2π-périodique, et donc elle est bornée et atteint ses bornes : $\exists\, x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$$

Par ailleurs, $f(x_0) \geq 0$, et $f(x_0) = 0 \iff \begin{cases} \sin^8(x_0) = 0 \\ \cos^{14}(x_0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sin(x_0) = 0 \\ \cos(x_0) = 0 \end{cases}$

ce qui est impossible puisque $\cos^2(x_0) + \sin^2(x_0) = 1$.

Ainsi, $f(x_0) > 0$, et donc finalement, si $x \geq 1$,

$$0 \leq \frac{\ln(x)}{x\left(\sin^8(x) + \cos^{14}(x)\right)} \leq \frac{\ln(x)}{x f(x_0)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x f(x)} = 0$.

$\boxed{\text{Ex 7}}$: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2$

f n'est pas uniformément continue s'écrit : $\exists \varepsilon > 0, \ \forall \delta > 0, \ \exists (x, x') \in \mathbb{R}^2,$
$|x - x'| \leq \varepsilon$ et $|f(x) - f(x')| > \delta$

Si $x, x' \in \mathbb{R}^2$, $f(x) - f(x') = x^2 - x'^2$
$= (x - x')(x + x')$,

donc on choisit $\varepsilon = 1$, et si $\delta > 0$, on pose $x' = x + \varepsilon = x + 1$
et $x = \delta$

$\Rightarrow |x - x'| = 1$ et $|f(x) - f(x')| = |2\delta + 1| > \delta$

donc f n'est pas UC.

$\boxed{\text{Ex 8}}$: Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue tq
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) f(y)$$

1. Par récurrence, on montre facilement que $\forall n \geq 2$, $\forall (x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$,
$f(x_1 + x_2 + \dots x_n) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k)$,
car $f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = f\left(\sum_{k=1}^{n-1} x_k + x_n\right) = f\left(\sum_{k=1}^{n-1} x_k\right) f(x_n)$
$= f\left(\sum_{k=1}^{n-2} x_k\right) f(x_{n-1}) f(x_n)$
$(\dots) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k).$

2. $f(0+0) = f(0)^2$, donc $f(0)(f(0) - 1) = 0$
$\Rightarrow f(0) \in \{0, 1\}.$

3. Si $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tq $f(x_0) = 0$, alors
$f(0) = f(x_0 - x_0) = f(x_0) f(-x_0) = 0$
et donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x + 0) = f(x) = f(x) f(0) = 0$,
donc $f = 0$.

4. On suppose que f ne s'annule pas, et donc $f(0) = 1$.
Soit $\alpha = f(1) \in \mathbb{R}^*$. $f(1) = f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 > 0$, donc $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.
Alors $f(2) = f(1+1) = f(1) f(1) = \alpha^2$ $\qquad f(0) = 1 = \alpha^0$
$f(3) = f(2+1) = \alpha^2 \cdot \alpha = \alpha^3$

Par récurrence, on montre que ~~[illegible]~~ $f(n) = \alpha^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$:

$$f(n) = \alpha^n \Rightarrow f(n+1) = f(n)f(1) = \alpha^n \alpha = \alpha^{n+1}.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $f(n-n) = f(0) = 1$

$$= f(n) f(-n)$$

$$= \alpha^n f(-n)$$

et donc $f(-n) = \frac{1}{\alpha^n} = \alpha^{-n}$

donc $\forall k \in \mathbb{Z}, \ f(k) = \alpha^k$.

6. Soit $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. $f\left(q\frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \dots \frac{p}{q}\right)$

$$\Rightarrow f(p) = \left(f\left(\frac{p}{q}\right)\right)^q$$

$$\Rightarrow \alpha^p = f\left(\frac{p}{q}\right)^q$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{p}{q}\right) = \alpha^{p/q}$$

donc $\forall r \in \mathbb{Q}, \ f(r) = \alpha^r$.

7. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ tq $r_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$

Alors $f(r_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$ par continuité,

et $\alpha^{r_n} = \exp(r_n \ln(\alpha)) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \exp(x \ln(\alpha)) = \alpha^x$

donc $f(x) = \alpha^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, si $f(x) = \alpha^x \ \forall x \in \mathbb{R}$ avec $\alpha > 0$, alors f vérifie : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \ f(x+y) = \alpha^{x+y} = \alpha^x \alpha^y = f(x)f(y)$.

Par conséquent,

$$\{f \text{ continue tq } f(x+y) = f(x)f(y) \ \forall x,y \in \mathbb{R}\} = \{x \mapsto \alpha^x, \ \alpha \in \mathbb{R}_+^*\} \cup \{0\}$$

$\boxed{\text{Ex } 9}$: Soit $a \in \mathbb{Z}$, $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^a \cos\left(\frac{1}{x}\right) \end{array}$

1. Si $a > 0$, alors $|f(x)| \leq |x|^a \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, et donc on peut prolonger f par continuité en 0.

Si par contre $a \leq 0$, $x^a \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0 (on le voit p.e. avec les suites $u_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $v_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$)

et donc f est prolongeable par C^0 en 0 ssi $a > 0$.

2. Soit $\tilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} x^a \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

si $x \neq 0$, $\frac{\tilde{f}(x) - f(0)}{x - 0} = x^{a-1} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, ce taux d'accroissement admet une limite lorsque $x \to 0$ ssi $a - 1 > 0$, ssi $a > 1$, et donc $\tilde{f}$ est dérivable en 0 ssi $a > 1$.

3. Si $a > 1$, $\tilde{f}'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \left(x^{a-1} \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$. Calculons la dérivée de $\tilde{f}$ ailleurs qu'en 0 : soit $x \neq 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= a x^{a-1} \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x^a \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \underbrace{a x^{a-1} \cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\xrightarrow[x \to 0]{} 0} + \underbrace{x^{a-2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{admet une limite lorsque } x \to 0 \text{ ssi } a-2>0} \end{aligned}$$

donc si $a > 2$, $\tilde{f}'(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0 = \tilde{f}'(0)$, et $\tilde{f}'$ est continue en 0.

si $1 < a < 2$, $\tilde{f}'$ n'est pas continue en 0.

$\boxed{\text{Ex 10}}$: $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = 1 \\ x + \frac{x \ln(x)}{1 - x} & \text{si } x \in]0,1[. \end{cases}$$

1. f est continue sur $]0,1[$ ~~......~~ par composition de fonctions continues.
   — dérivable — dérivables.

De plus, $x \ln(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ par croissances comparées, donc $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0 = f(0)$

et, si $g : x \mapsto x \ln(x)$, $\frac{x \ln(x)}{1 - x} = -\frac{g(1) - g(x)}{1 - x} \xrightarrow[x \to 1]{} -g'(1) = -1$

g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$
et $g' : x \mapsto 1 + \ln(x)$

donc $f(x) \xrightarrow[x \to 1]{} 0 = f(1)$, donc f est continue sur $[0,1]$.

2. $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1 + \frac{\ln(x)}{1-x} \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty$ donc f n'est pas dérivable en 0.

$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{x}{x-1} + \frac{x\ln(x)}{-(x-1)^2}$

on admet ici le DL à l'ordre 2 :

$$\ln(x) \underset{x\to 1}{=} x-1 - \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2)$$

et donc $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \underset{x\to 1}{=} x\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} + o(1)\right)$

$$\underset{x\to 1}{=} \frac{x}{2} + o(1) \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{1}{2}$$

donc f est dérivable en 1, et $f'(1) = \frac{1}{2}$

3. $f(0) = f(1) = 0$, f est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$

$\Rightarrow$ le théorème de Rolle s'applique,

$$\exists\, c \in]0,1[\text{ tq } f'(c) = 0.$$

$\boxed{\text{Ex } 11}$: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on va démontrer par récurrence la propriété suivante : f s'annule $n+1$ fois $\Rightarrow$ $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois.

* Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'annule deux fois, il existe $a < b$ tq $f(a) = f(b) = 0$. Mais alors f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, donc $\exists\, c \in]a,b[$ tq $f'(c) = 0$.

* Soit f $n+1$ fois dérivable et qui s'annule $n+2$ fois :

$\exists\, a_0 < a_1 < \dots < a_{n+1}$ tq $f(a_k) = 0 \quad \forall k \in [\![0;n+1]\!]$.

On suppose par ailleurs que $\forall g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n fois dérivable et qui s'annule $n+1$ fois, on a que $g^{(n)}$ s'annule au moins une fois.

En appliquant le th. de Rolle aux intervalles $[a_k, a_{k+1}]$, $k \in [\![0;n]\!]$, on déduit l'existence de $b_k \in]a_k, a_{k+1}[$ tq $f'(b_k) = 0$.

Mais alors $b_0 < b_1 < \dots < b_n$, et f' est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'annule en $b_0, b_1 \dots b_n$ $\Rightarrow$ $(f')^{(n)} = f^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois.

* L'hérédité est prouvée, et donc la propriété est vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$\boxed{\text{Ex } 12}$: $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et donc si $t > 0$, le théorème des accroissements finis s'applique sur le segment $[0,t]$: il existe $s \in]0,t[$ tq

$$\arctan(t) - \arctan(0) = (t-0)\arctan'(s)$$

$$\Rightarrow \arctan(t) = \frac{t}{1+s^2}$$

Or, $0 < s < t$, et donc $\frac{1}{1+s^2} > \frac{1}{1+t^2}$, d'où finalement,

$$\arctan(t) > \frac{t}{1+t^2}.$$

$\boxed{\text{Ex } 13}$: $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, $x \longmapsto x e^{1/x}$ est dérivable (et donc continue), donc

si $x > 0$, on peut appliquer le TAF sur le segment $[x, x+1]$ pour trouver $y \in]x, x+1[$ tq

$$\begin{aligned} f(x+1) - f(x) &= (x+1-x) f'(y) \\ &= e^{1/y} - \frac{1}{y^2} y e^{1/y} \\ &= \left(1 - \frac{1}{y}\right) e^{1/y} \end{aligned}$$

Par conséquent, $f(x+1) - f(x) \leqslant 1 \cdot e^{1/y} < e^{1/x}$

et $f(x+1) - f(x) \geqslant \left(1 - \frac{1}{y}\right) \cdot 1 > 1 - \frac{1}{x}$

et donc, d'après le th. des gendarmes,

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x+1) - f(x)) = \lim_{x \to +\infty} \left((x+1) e^{\frac{1}{x+1}} - x e^{\frac{1}{x}} \right) = 1.$$

$\boxed{\text{Ex } 14}$: $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable tq $f(0) = 0$.

1. Supposons que $\forall x \in [0,1]$ $f(x) \neq 0$. Alors, le TAF sur $[0,x]$, $x > 0$ implique l'existence de $y \in]0,x[$ tq $f(x) - f(0) = f'(y)(x-0)$

$$\Rightarrow \quad f(x) = x f'(y) \neq 0$$

donc f ne s'annule pas sur $]0,1]$. Comme elle est continue, la contraposée du TVI implique qu'elle reste de signe constant sur les intervalles de la forme $[x,1]$, $\forall x > 0$, et donc elle reste de signe constant sur $[0,1]$.

2. Si f' est continue sur $[0,1]$ et strictement positive, le théorème du maximum donne :

$$\exists\ x_0 \in [0,1] \text{ tq } \forall x \in [0,1],\ f'(x) \geq f'(x_0)$$

On pose alors $m = f'(x_0) > 0$, et le TAF implique, comme dans la question précédente :

$$\forall x \in]0,1],\ \exists y \in]0,x[\text{ tq } f(x) = x f'(y) \geq x m$$

ce qui répond à la question.