2019-2020

$\boxed{\text{TD 1}}$

$\boxed{\text{Ex 1}}$: $\frac{13}{15} = \frac{104}{120} < \frac{7}{8} = \frac{105}{120}$, $\frac{3}{5} + \frac{2}{3} = \frac{9}{15} + \frac{10}{15} = \frac{19}{15} < \frac{4}{3} = \sqrt{\frac{16}{9}} < \sqrt{3}$

donc $\frac{13}{15} < \frac{7}{8} < 1 < \frac{3}{5} + \frac{2}{3} < \sqrt{3} < 2$

$\boxed{\text{Ex 2}}$: 1. $x = \sqrt{x^4} = x^2$, donc $x \neq 0 \Rightarrow 1 = x$

et $x = 0$ est solution

$\{x \in \mathbb{R} / \ x = \sqrt{x^4}\} = \{0, 1\}$

2. $x \leq x^2 \iff \begin{cases} x > 0 \text{ et } 1 \leq x \\ x < 0 \text{ et } 1 \geq x \\ x = 0 \end{cases}$, donc $\{x \in \mathbb{R} / \ x \leq x^2\}$ $= \mathbb{R}_- \cup \{x \geq 1\}$.

3. $\sqrt{1+x} = 1-x \iff 1+x = (1-x)^2$ et $1-x \geq 0$
$\iff x^2 - 3x = 0$ et $x \leq 1$
$\iff x(x-3) = 0$ et $x \leq 1$ et donc $\{x \geq -1 / \sqrt{1+x} = 1-x\} = \{0\}$

4. On multiplie par $(x-2)(3x+2)$ pour obtenir

$3x+2 < (1-x)(x-2)$ ou $3x+2 > (1-x)(x-2)$

selon le signe de $(x-2)(3x+2)$. Dans les deux cas on regarde le signe de x^2+4, qui est toujours > 0.

Ainsi, $\frac{1}{x-2} < \frac{1-x}{3x+2} \iff \begin{cases} x^2+4 < 0 \text{ et } (x-2)(3x+2) > 0 \\ x^2+4 > 0 \text{ et } (x-2)(3x+2) < 0 \end{cases}$

et donc $\{x \in \mathbb{R} \setminus \{2, -\frac{2}{3}\} / \frac{1}{x-2} < \frac{1-x}{3x+2}\} =]-\frac{2}{3} ; 2[$.

$\boxed{\text{Ex 3}}$ 1. $t \longmapsto t^2 + t + 3$ est définie sur $\mathbb{R}$.

2. $t \longmapsto \sqrt{(t-1)(t+1)}$ est définie sur $\{t \in \mathbb{R} \setminus (t-1)(t+1) \geq 0\} = \mathbb{R} \setminus]-1;1[$

3. $x \longmapsto \frac{1}{x^2-4x+6} = \frac{1}{(x-2)^2+2}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

4. $x \longmapsto \ln(x^2-4)$ est définie sur $\{x \in \mathbb{R} \setminus x^2-4 > 0\} = \mathbb{R} \setminus [-2;2]$

$\boxed{Ex\ 4}$: $x, y \in [0;1]$, donc $x^2 \leq x$ et $y^2 \leq y$, et

$$x^2 + y^2 - xy - 1 \leq x + y - xy - 1 = (x-1)(1-y) \leq 0.$$

$\boxed{Ex\ 5}$: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante, $f \circ f = id$

On suppose qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ / $f(x) \neq x$.

Si $f(x) > x$, alors par composition $(f \circ f)(x) \geqslant f(x) > x$, exclu.

Si $f(x) < x$, ——— $(f \circ f)(x) \leq f(x) < x$, exclu.

Donc $f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{Ex\ 6}$ $f : [0,1] \to [0,1]$

$$x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 1-x & \text{sinon} \end{cases}$$

Si $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, alors il est clair que $f(f(x)) = f(x) = x$.

Sinon, alors $1-x \notin \mathbb{Q}$, et donc $f(f(x)) = f(1-x) = 1-(1-x) = x$.

$\boxed{Ex\ 7}$: $f(x) = x^2 + 1$

$g(x) = 3x - 1$

$(f \circ g)(2) = f(5) = 26$

$(g \circ f)(2) = g(5) = 14$

donc $f \circ g \neq g \circ f$.

$\boxed{Ex\ 8}$: 1. f, g paires $\Rightarrow$ $f+g$, fg et $f \circ g$ sont paires. En effet,

si $x \in \mathbb{R}$, $(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$

de même pour le produit

$$(f \circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(g(x)) = (f \circ g)(x).$$

2. f, g impaires $\Rightarrow$ $f+g$ et $f \circ g$ impaires, fg paire.

$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -(f+g)(x)$.

$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = (-f(x))(-g(x)) = (fg)(x)$

$(f \circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = -f(g(x))$.

3. f paire, g impaire $\Rightarrow$ on ne peut rien dire sur la somme

fg est impaire

$f \circ g$ et $g \circ f$ sont paires

$\boxed{\text{Ex 9}}$: 1. Soit f impaire. $f(0) = f(-0) = -f(0)$, donc $2f(0)=0$
$\Rightarrow f(0)=0$.

2. Soit f impaire et paire, et soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = f(-x) = -f(x), \text{ donc } f(x)=0.$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)=0$.

Réciproquement, $f=0$ est bien à la fois paire et impaire.

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{g(x)} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{h(x)}$$

on vérifie que g est paire et h est impaire.

4. Soit f paire, g impaire, et $s : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto -x \end{array}$

$s' = -1$, et $f \circ s = f$, donc en dérivant, on obtient

$$-f' \circ s = f' \; ; \; f' \text{ est impaire.}$$

De la même manière, $g \circ s = -g \Rightarrow -g' \circ s = -g' \Rightarrow g'$ est paire.

$\boxed{\text{Ex 10}}$ $f(x) = \sin\left(x^2(x+1)\right)$

$f'(x) = \left(3x^2+2x\right)\cos\left(x^2(x+1)\right)$

$g(x) = \ln\left(\ln(x)\right)$

$g'(x) = \frac{1}{x}\,\frac{1}{\ln(x)}$

$h(x) = \frac{1}{\cos(x)}$, $h'(x) = -\frac{-\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\sin(x)}{1-\sin^2(x)}$

$\boxed{\text{Ex 11}}$: $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^{1/3} \end{array}$ est la réciproque de $F : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3 \end{array}$

Or, $F'(x) = 3x^2$, donc si $x \neq 0$, f est dérivable, et $f'(x) = \frac{1}{(F' \circ f)(x)} = \frac{1}{3\left(f(x)\right)^2} = \frac{1}{3x^{2/3}}$

$g : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(x) \end{array}$ est la réciproque de $G : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \longmapsto e^x \end{array}$

$G'(x) = e^x > 0$, donc g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et

$$g'(x) = \frac{1}{(G' \circ g)(x)} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}.$$

Ex 12 : On procède par récurrence, comme pour le binôme de Newton.

$(fg)^{(0)} = fg$

$(fg)^{(1)} = (fg)' = f'g + gf'$

Supposons que $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

Alors
$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k)} g^{(n-k)}\right)'$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n+1-k)}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$
$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$
$$= f^{(n+1)} + g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right)}_{= \binom{n+1}{k}} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

donc l'hérédité est prouvée, et la propriété est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ex 13 : A $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$

1. Par croissances comparées, $(x^2 - 2x + 2)e^{-x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

par contre, $(x^2 - 2x + 2)e^{-x} \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$,

donc $g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$ et $g(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$

2. $g'(x) = (-2x + 2)e^{-x} + (x^2 - 2x + 2)e^{-x} = x^2 e^{-x} \geqslant 0$

3.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	1

4. g' est strictement positive sauf en un point, donc g est strictement croissante. C'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\infty;1[$, et par conséquent 0 admet un unique antécédent $\alpha \in \mathbb{R}$ par g.

5. Comme g est strictement croissante, $g(x) > 0$ si $x > \alpha$
et $g(x) < 0$ si $x < \alpha$.

B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x - 1 + (x^2+2)e^{-x}$

1. $(x^2+2)e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, donc $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

$x \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$ et $(x^2+2)e^{-x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$, donc a priori, la limite est indéterminée

$$x + (x^2+2)e^{-x} = e^{-x}\left(xe^{x} + (x^2+2)\right)$$

et $xe^{x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$, donc $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$

2. $f'(x) = 1 + (2x)e^{-x} - (x^2+2)e^{-x} = 1 - (x^2-2x+2)e^{-x} = g(x)$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x) = g(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3. $g(\alpha) = 0$, donc $1 - (\alpha^2 - 2\alpha + 2)e^{-\alpha} = 0$, et alors

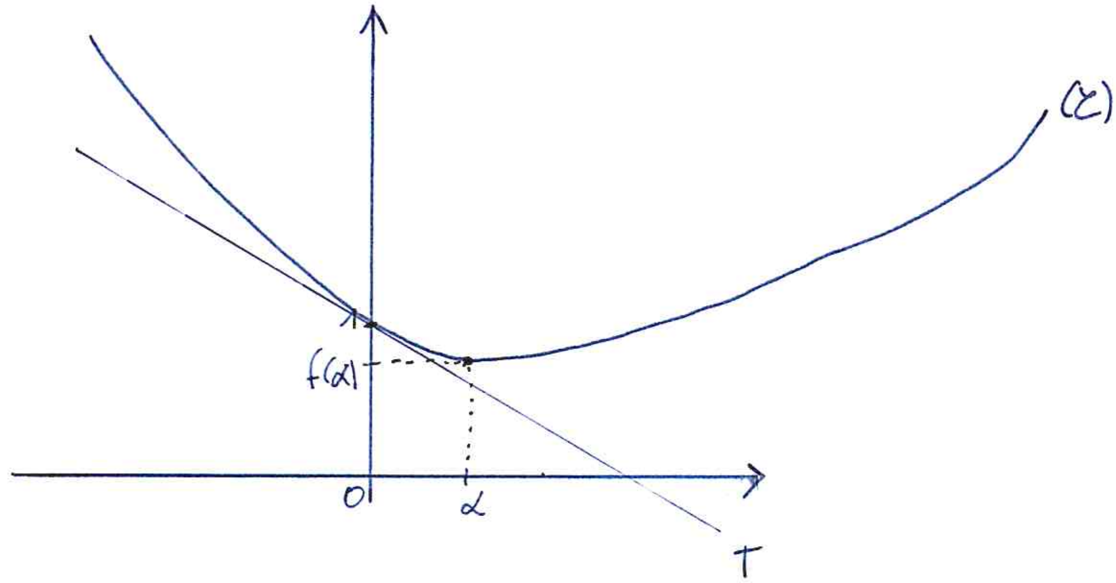
$$f(\alpha) = \alpha - 1 + (\alpha^2+2)e^{-\alpha} = \alpha - 1 + 1 + 2\alpha e^{-\alpha}$$
$$= \alpha(1 + 2e^{-\alpha})$$

4. La tangente à $(\mathcal{C})$ en $(0, f(0))$ est :

$$T : \ y = f'(0)x + f(0) = -x + 1$$

5. $\alpha > 0$, donc $f(\alpha) > 0$, et comme c'est le minimum de f,
$f > 0$.

5



$\boxed{Ex\,4}$: 1. $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-1)^2 - 2x^3(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{3x^2(x-1) - 2x^3}{(x-1)^3} = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$+\infty$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

$f(3) = \dfrac{8}{4} = 2$

2. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus]-1;1[$, et elle est impaire.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\,x - \sqrt{x^2-1}}{x^2} = \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\left(x^2 - (x^2-1)\right) = \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}} > 0$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$		$\|\|$	$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	0 $\|\|$		$\|\|$ 0	$\nearrow$	1

3. $f(x) = x^2 + x - \frac{1+\ln(x)}{x}$ est définie sur $]0;+\infty[$.

Par croissances comparées, $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, donc $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

$f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$

$$f'(x) = 2x + 1 - \frac{\frac{1}{x}x - (1+\ln(x))}{x^2} = \frac{2x^3 + x^2 - 1 + 1 + \ln(x)}{x^2}$$

$x \longmapsto 2x^3 + x^2 + \ln(x)$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$ lorsque $x \to +\infty$
$-\infty$ $x \to 0$

donc il existe un unique α tel que $f'(\alpha) = 0$. L'ordinateur donne $\alpha \simeq 0{,}54$.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

$\alpha > \frac{1}{2}$

$$f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha - \frac{1+\ln(\alpha)}{\alpha}$$
$$= \alpha^2 + \alpha - \frac{1 - 2\alpha^3 - \alpha^2}{\alpha} = 3\alpha^2 + 2\alpha - \frac{1}{\alpha}$$
$$> 0$$

$\boxed{\text{Ex 15}}$: $f : [1;+\infty[\longrightarrow [0;+\infty[$
$x \longmapsto x^2 - 1$

f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$, donc elle est bijective entre son ensemble de définition et son image.

Or, $f(1) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, donc f est bien bijective.

$\boxed{\text{Ex 16}}$: 1. $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$
$n \longmapsto n+1$

$f(n_1) = f(n_2) \iff n_1 + 1 = n_2 + 1$
$\iff n_1 = n_2$ donc f est injective

0 n'a pas d'antécédent par f, elle n'est donc pas surjective.

$g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$
$n \longmapsto n+1$

g est injective (cf f)
Soit $n \in \mathbb{Z}$ $g(n-1) = n$, donc g est surjective
g est bijective

$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2 + 1$

$h(1) = h(-1) = 2$, donc h n'est pas injective.
Elle n'est pas non plus surjective car 0 n'a pas d'antécédent.

2. (note : c'est l'exercice 17). $f : x \longmapsto \frac{2x}{1+x^2}$

(a) * Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tq $f(x) = f(y)$.

Alors $\frac{2x}{x^2+1} = \frac{2y}{y^2+1} \Leftrightarrow 2x(y^2+1) - 2y(x^2+1) = 0$

$\Leftrightarrow xy^2 + x - yx^2 - y = 0$

$\Leftrightarrow (y-x)(xy-1) = 0$

en particulier, si $x \neq 0$ et $y = \frac{1}{x}$, alors $f(x) = f(y)$. f n'est donc pas injective.

* Étudions la surjectivité. On cherche $x \in \mathbb{R}$ tq $f(x) = 2$.

$\Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+1} = 2$

$\Leftrightarrow x = x^2 + 1$

$\Leftrightarrow x^2 - x + 1 = (x-1)^2 + x = 0$

Or, si $x \leqslant 0$, $f(x) \leqslant 0 < 2$

si $x \geqslant 0$, $(x-1)^2 + x > 0$, donc il n'existe pas de solution.

f n'est pas surjective.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. $(x-1)^2 \geqslant 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$

$\Rightarrow x^2 + 1 \geqslant 2x$

$\Rightarrow 1 \geqslant \frac{2x}{1+x^2}$

de même, $(x+1)^2 \geqslant 0 \Rightarrow -1 \leqslant \frac{2x}{1+x^2}$.

On en conclut que $f(\mathbb{R}) \subset [-1;1]$.

(c) Soit $g : \begin{array}{l} [-1;1] \longrightarrow [-1;1] \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$. Montrons que g est une bijection.

* injectivité : $g(x) = g(y) \Leftrightarrow (y-x)(xy-1) = 0$

$\Leftrightarrow x = y$ ou $xy = 1$

Or, si $x, y \in [-1;1]$, $xy = 1 \Rightarrow x = y$

donc $g(x) = g(y) \Leftrightarrow x = y$, g est injective.

* surjectivité : ~~Soit $a \in [-1;1]$. On cherche $x \in [-1;1]$~~

~~tel que~~ on remarque $g(-1)=-1$ et $g(1)=1$.

Par continuité, $[-1;1] \subset g([-1;1])$

Or, on sait que $g([-1;1]) \subset [-1;1]$, donc $g([-1;1])=[-1;1]$; g est surjective.

* g est donc bijective.

$\boxed{\text{Ex 17}}$ 4. Soit $x \in \mathbb{R}$, f est dérivable en x et

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1)-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

En particulier, si $x \in]-1;1[$, $g'(x)>0$, donc g est strictement croissante + continue $\Rightarrow$ réalise une bijection sur $[g(-1), g(1)] = [-1;1]$

$\boxed{\text{Ex 18}}$: $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. « $f \circ g$ surjective $\Rightarrow$ f surjective » vrai : soit $y \in \mathbb{R}$. Alors $\exists\, x$ tq $(f \circ g)(x) = y$. En particulier, $f(g(x)) = y$, donc f est surjective.

2. « $f \circ g$ surjective $\Rightarrow$ g surjective » faux : par exemple : $g(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x^2} & \text{si } |x|<1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. « $f \circ g$ injective $\Rightarrow$ f injective » faux : par exemple :

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{si } |x|<1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. « $f \circ g$ injective $\Rightarrow$ g injective » vrai : soit $x, y \in \mathbb{R}$ / $g(x) = g(y)$.

Alors $f(g(x)) = f(g(y)) \Rightarrow x = y$.

~~5. « f injective $\Rightarrow$ $f \circ g$ l'est aussi » : faux.~~

par ex : $f(x) = x$
$g(x) = 0$.