TD 3

Ex 1 : 1. 1. $(6 < \frac{25}{4}) \Rightarrow (\sqrt{6} < \frac{5}{2})$

$6 = \frac{24}{4}$, donc $6 < \frac{25}{4}$, et donc $\sqrt{6} < \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$.

Les deux propositions sont vraies, donc l'implication est vraie.

1.2. $(2=3) \Rightarrow (4 \text{ est pair})$

$F \Rightarrow V$, la proposition est fausse.

1.3. $(2=3) \Rightarrow (3=4)$

$F \Rightarrow F$, vraie

1.4. $\forall x \in \mathbb{R}, \ ((x \leq 0) \Rightarrow (x-1 < 0))$ vrai

1.5. $\forall x \in \mathbb{R}, \ x \leq 0$ et $x-1 < 0$ faux (ce n'est pas une implication)

2.1. Soit $x \in \mathbb{R}$ tq $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$.

$$\Rightarrow x(x-3) = 3x-5 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$$
$$\Rightarrow (x-1)(x-5) = 0$$
$$\Rightarrow x \in \{1, 5\}.$$

<u>Synthèse</u> : on vérifie : pour $x = 1$, $\sqrt{x(x-3)}$ et $\sqrt{3x-5}$ ne sont pas définis. Ce n'est pas une solution.

pour $x = 5$, $\sqrt{5(5-3)} = \sqrt{10} = \sqrt{3 \times 5 - 5}$.

<u>Conclusion</u> : $\{x \in \mathbb{R} \ / \ \sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}\} = \{5\}$.

2.2. Soit $x > 0$ tq $x^{(x^x)} = (x^x)^x = x^{x^2}$

alors $\exp(x^x \ln(x)) = \exp(x^2 \ln(x))$

$$\Rightarrow x^x = x^2$$
$$\Rightarrow \exp(x \ln(x)) = \exp(2\ln(x))$$
$$\Rightarrow x = 2.$$

<u>Synthèse</u> : $2^{2^2} = 2^4 = 16$, $(2^2)^2 = 4^2 = 16$.

<u>Conclusion</u> : $\{x > 0 \ / \ x^{(x^x)} = (x^x)^x\} = \{2\}$.

Ex 2 : 1. (a) $\neg((P \wedge Q) \Rightarrow R) \equiv \neg(\neg(P \wedge Q) \vee R)$

$$\equiv (P \wedge Q) \wedge (\neg R)$$

(b) $\neg(P \wedge (\neg Q \vee R)) \equiv \neg P \vee \neg(\neg Q \vee R)$

$$\equiv \neg P \vee (Q \wedge \neg R) \equiv P \Rightarrow Q \wedge \neg R$$

2. (a) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ (xy \neq 0 \text{ et } x \leq y) \Rightarrow \left(\frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}\right)$

c'est faux : $\begin{matrix} x=-1 \\ y=1 \end{matrix}$ est un contre-exemple.

(b) $\exists x \in \mathbb{R}, \left[(x \leq 0) \text{ et } \left((\sqrt{x^2} \neq -x) \text{ ou } \left((x+1)^2 > x^2+1 \right) \right) \right]$

Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \leq 0$.

alors $\sqrt{x^2} = |x| = -x$

donc $\forall x \in]-\infty ; 0]$, $\sqrt{x^2} = -x$.

Ex 3 : 1. On peut faire un tableau de vérité :

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

donc $(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

et donc $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$ est vraie.

2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On suppose que $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)$

$\Rightarrow xy - x + y - 1 = xy + x - y - 1$

$\Rightarrow 2x = 2y$

$\Rightarrow x = y$

donc, par contraposée : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \ (x \neq y) \Rightarrow ((x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1))$

3. Soit n pair. Alors $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que

$n = 2k \Rightarrow n^2 = 4k^2$

$\Rightarrow n^2$ est pair.

Par contraposée, n^2 impair $\Rightarrow n$ impair.

Ex 4 : 1. On peut faire un tableau de vérité, ou alors

$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R) \equiv \neg\left((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R) \right) \vee (\neg P \vee R)$

$\equiv (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \vee R)$

et maintenant ~~P R Q / V F V / V F F~~

~~$\neg P \vee R \equiv V$~~

Si $(P,Q) \neq (V,F)$, alors $(\neg P \vee R) = V$

Sinon, $(P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg R) = (V \wedge \neg Q) \vee (V \wedge Q)$

$= Q \vee \neg Q = V$

donc $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R) \equiv V.$

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. $x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$, donc

$$x^2 - 5x + 6 \leq 0 \Rightarrow x \in [2;3].$$

(b) Soit $x \in [2;3]$. Alors $x - 1 \geqslant 1 > 0$

et $10 - x^2 \geqslant 10 - 9 = 1 > 0$

donc $(x-1)(10-x^2) \geqslant 0$.

Par transitivité: $x^2 - 5x + 6 \leq 0 \Rightarrow x \in [2;3] \Rightarrow (x-1)(10-x^2) \geqslant 0$

donc $x^2 - 5x + 6 \leq 0 \Rightarrow (x-1)(10-x^2) \geqslant 0$.

3.

P	Q	R	$P \Leftarrow Q$	$Q \Leftarrow R$	$R \Leftarrow P$	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$R \Rightarrow P$	$P \Leftarrow Q$ et $Q \Leftarrow R$ et $R \Leftarrow P$	$P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R$ et $R \Rightarrow P$
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	V	V	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F	V	V	F	F
F	F	V	V	F	F	V	V	F	F	F
V	V	F	V	F	F	V	F	V	F	F
F	V	F	F	F	V	V	F	V	F	F
V	F	F	F	V	F	F	V	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V

donc $(P \Leftarrow Q) \wedge (Q \Leftarrow R) \wedge (R \Leftarrow P) \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \wedge (R \Rightarrow P)$.

4. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

a⇒b : Supposons que $\forall t \in \mathbb{R}$, $x_0^2 + y_0^2 \leq (t - x_0^2) + (t + y_0)^2$

$\Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 \leq x_0^2 - 2t x_0 + t^2 + y_0^2 + 2t y_0 + t^2$

$\Leftrightarrow 0 \leq 2t^2 - 2t(x_0 - y_0)$

polynôme de degré 2 de signe constant $\Rightarrow$ discriminant négatif $\Rightarrow 4(x_0 - y_0)^2 \leq 0 \Rightarrow x_0 = y_0$.

b⇒c : Supposons $x_0 = y_0$. Alors, $\forall t \in \mathbb{R}$, $x_0 t + y_0(-t) = t(x_0 - y_0) = 0$.

c⇒a : Supposons que $\forall t \in \mathbb{R}$, $x_0 t + y_0(-t) \leq 0$

$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}$, $2t^2 - 2t(x_0 - y_0) \geqslant -2(x_0 t - y_0 t) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 \leq (t - x_0)^2 + (t + y_0)^2$.

Conclusion : $a \Rightarrow b \Rightarrow c \Rightarrow a$. donc ces propriétés sont équivalentes

---

$\boxed{\text{Ex 5}}$ 1. $P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$

$$\equiv \neg (P \wedge \neg Q)$$

donc $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \text{non}\,(P \text{ et non } Q) \equiv V$.

2. Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tq

$$-x^4 + x^3 + x - 11 \leq 0$$

et $-x^4 + x^3 - 9 \geq 0$

Alors $x - 2 \leq 0 \Rightarrow x \leq 2$, et donc $-x^4 + x^3 - 9 \leq -x^4 + 8 - 9$

$$= -x^4 - 1 < 0$$

c'est absurde.

Par conséquent, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$(-x^4 + x^3 + x - 11 \leq 0) \Rightarrow (-x^4 + x^3 - 9 < 0).$$

3. Supposons qu'il existe $n \in P \cap I$. Alors il existe $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tq $n = 2k_1 + 1 = 2k_2 \Rightarrow 2(k_2 - k_1) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$

ce qui est exclu.

Par conséquent, $P \cap I = \emptyset$.

$\boxed{\text{Ex 6}}$: 1. $P \Rightarrow (Q \text{ ou } R) \equiv \neg P \vee (Q \vee R)$

$$\equiv (\neg P \vee Q) \vee R$$

$$\equiv \neg (P \wedge \neg Q) \vee R \equiv (P \wedge \neg Q) \Rightarrow R$$

donc $(P \Rightarrow (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \wedge \neg Q) \Rightarrow R) \equiv V$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons que

$$\begin{array}{l} x^3 + x^2 - x - 1 > 0 \\ \text{et } x > -1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x^2(x+1) > x+1 \\ \text{et } x + 1 > 0 \end{array} \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x^4 > 1$$

~~et donc~~ Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^3 + x^2 - x - 1 > 0$

$$\Rightarrow (x \leq -1 \text{ ou } x^4 > 1.)$$

2. Non. Par ex, $u_n = (-1)^n$ n'est ni croissante ni décroissante.

Ex 10 : 1. Mq " $\forall (x_1, \dots x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$, $(\sum x_i = 0) \Rightarrow (\forall j \in [\![1;n]\!], x_j = 0)$

Contraposée : ~~on suppose~~ Si : $\exists j \in [\![1;n]\!]$ tq $x_j \neq 0$,

alors $x_j > 0$ et $\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant x_j > 0$

donc c'est vrai.

2. On suppose que $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $x_i > \frac{x}{n}$

alors $\sum_{i=1}^{n} x_i > \sum_{i=1}^{n} \frac{x}{n} > x$

donc par contraposée, $\sum_{i=1}^{n} x_i = x \Rightarrow \exists i \in [\![1;n]\!], x_i \leqslant \frac{x}{n}$.

Ex 11 : 1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

2. $\exists x$

3. $\exists x$

4. $\exists x$

5. $\emptyset$ car le discriminant est < 0

6. $\forall$

Ex 12 : 1. $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 > 7$

vrai, $x = 3$ par ex.

2. $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 > 7$.

faux : $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 \leqslant 7$.

3. $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, y > x^2$.

vrai, $y = x^2 + 1$ marche

4. $\exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}, y > x^2$

faux : $\forall y \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{N}, y \leqslant x^2$

$x = y$ ok

5. $\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2$, $((x \leqslant y) \Leftrightarrow (x^2 \leqslant y^2))$

faux : $\exists (x,y) \in \mathbb{Z}$, $(x \leqslant y)$ et $(x^2 > y^2)$

$x = -2$, $y = 1$.

6. $\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2$, $(xy \leqslant x^2) \Rightarrow (y \leqslant x)$

faux : $\exists (x,y) \in \mathbb{Z}^2$, $xy \leqslant x^2$ et $y > x$

$x = -1$, $y = 1$.

Ex 13 : $A = [0;1]$. 1. $\forall x \in A, \forall y \in A, x+y \in A$: faux $1+1=2 \notin A$.

2. $\forall x \in A, \exists y \in A, (x+y) \in A$: vrai pour $y = 0$: $\forall x \in A$, $x+0 \in A$.

3. $\exists x \in A, \forall y \in A$ $(x+y) \in A$: vrai pour $x = 0$.

Ex 7 : 1. $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\neg\left[(x=2) \wedge ((x+y=5) \vee (y \geqslant 3))\right] \equiv (x \neq 2) \vee \left((x+y \neq 5) \wedge (y<3)\right)$$

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$\neg\left[\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon>0,\ \exists \eta>0,\ \forall y \in \mathbb{R},\ ((|x-y|<\eta) \Rightarrow (|f(x)-f(y)|<\varepsilon))\right]$$

$$\equiv \exists x \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon>0,\ \forall \eta>0,\ \exists y \in \mathbb{R},\ \left((|x-y|<\eta) \text{ et } (|f(x)-f(y)| \geqslant \varepsilon)\right)$$

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

$$\neg\left[\forall \varepsilon>0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ ((n \geqslant N) \Rightarrow (|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon))\right]$$

$$\equiv \exists \varepsilon>0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N}\ (n \geqslant N) \text{ et } (|f_n(x)-f(x)| \geqslant \varepsilon).$$

Ex 8 : 1. Contraposée : Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose $x>0$. Alors $0<\frac{x}{2}<x$, c'est-à-dire qu'il existe $\varepsilon>0$ tq $x>\varepsilon$. Par contraposée, si $(\forall \varepsilon>0,\ x \leqslant \varepsilon)$, alors $x \leqslant 0$.

2. C'est faux : la négation est vraie : $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon>0,\ x \leqslant \varepsilon$ et $x>0$

par ex : $x=\varepsilon=1$.

3. Contraposée, cf. 1. Vrai
4. Vrai, c'est la déf. d'un intervalle ouvert.
5. Faux : $\exists I$ ouvert, $\forall \varepsilon>0,\ \exists x \in I$ tq $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\ \not\subset I$.

par exemple, $I=]0,1[$ et $x=\frac{\varepsilon}{2}$.

6. Faux $-1 \leqslant 1$ et $\frac{1}{1}>\frac{1}{-1}$.
7. Vrai : $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$, donc

$$x \leqslant y \Rightarrow \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y}.$$

Ex 9 : 1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas croissante.

$$\neg\text{"}(u_n) \text{ est croissante"} \equiv \neg\left(\forall n,p \in \mathbb{N},\ (n \geqslant p) \Rightarrow (u_n \geqslant u_p)\right)$$

$$\equiv \exists n,p \in \mathbb{N},\ n \geqslant p \text{ et } u_n<u_p.$$

Ex 14 : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}_+, \forall z \in \mathbb{R}_+ \ ((z \leq y) \Rightarrow (z^2 \leq x^2))$

~~Pour~~ Pour tout réel x, il existe un réel positif y tel que si $z \geq 0$ vérifie $z \leq y$, alors $z^2 \leq x^2$.

Vrai : $y = \sqrt{|x|}$. $\quad z \leq \sqrt{|x|} \Rightarrow z^2 \leq x^2$.

Ex 15 : 1.

$$\begin{array}{l} 1 + 2 + 3 + \text{———} + n \\ + \ n + n-1 + \text{———} + 1 \\ \hline = n+1 + n+1 + \text{———} + n+1 = n(n+1) \end{array}$$

donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Par récurrence : c.f. feuille 2. ex 7.

2. $10^0 - 1 = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $10^n - 1 = (10-1)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 10^k = 9\left(\sum_{k=0}^{n-1} 10^k\right)$

(somme d'une suite géométrique)

donc $\forall n \in \mathbb{N}, \ 9 \mid 10^n - 1$.

Par récurrence : * $10^0 - 1 = 0$

* on suppose, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, que $10^n - 1 = 9k, k \in \mathbb{N}$

Alors $10^{n+1} - 1 = 10(10^n) - 1$

$= 10(9k+1) - 1 = 9\cdot(10k) + 9$

$= 9\cdot(10k+1)$.

* par principe de récurrence, c'est vrai $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ex 16 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\quad |\sin(0.\alpha)| = 0 \leq 0\, |\sin(\alpha)|$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $|\sin(n\alpha)| \leq n|\sin(\alpha)|$.

Alors $|\sin((n+1)\alpha)| = |\sin(n\alpha)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(n\alpha)|$

$\leq |\sin(n\alpha)||\cos(\alpha)| + |\sin(\alpha)||\cos(n\alpha)|$

$\leq n|\sin(\alpha)| + |\sin(\alpha)| = (n+1)|\sin(\alpha)|$.

Par principe de récurrence, $|\sin(n\alpha)| \leq n|\sin(\alpha)| \ \forall n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Ex 17}}$: Il faut initialiser sur deux termes, sinon la récurrence ne fonctionne pas. En l'occurence, c'est faux pour $n=1$. C'est une conséquence du fait que la formule de récurrence définissant (u_n) porte sur deux termes et non un seul.

$\boxed{\text{Ex 18}}$: 1. On suppose que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, alors $\exists (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tq $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$, et $\text{pgcd}(p,q) = 1$.

Mais alors $p^2 = 2q^2$, donc p^2 est pair, donc p est pair donc $p = 2p_0$, $p_0 \in \mathbb{Z}$. Alors $(2p_0)^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2p_0^2$, donc q est pair. C'est impossible puisque $\text{pgcd}(p,q) = 1$.

Conclusion : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

2. Soit $X = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.

1e cas : $X \in \mathbb{Q}$, donc $x = \sqrt{2}$ vérifie :
$x \notin \mathbb{Q}$ et $x^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$.

2e cas : $X \notin \mathbb{Q}$, alors $X^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2 \in \mathbb{Q}$
donc X vérifie :
$X \notin \mathbb{Q}$ et $X^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$.

Conclusion : $\exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \,/\, x^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$.

3. $1 + \sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, c'est exclu, donc $1 + \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Même raisonnement que dans 2. :

1er cas : $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$, alors $\sqrt{2}^{1+\sqrt{2}} = \underbrace{\sqrt{2}}_{\notin \mathbb{Q}} \underbrace{(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})}_{\in \mathbb{Q}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

2e cas : $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$, alors $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{1+\sqrt{2}} = \underbrace{2}_{\in \mathbb{Q}} \underbrace{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}_{\notin \mathbb{Q}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

donc $\exists (x,y) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2$ tq $x^y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

$\boxed{\text{Ex } 19}$: 1. Soient $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$x = y \Leftrightarrow x-1 = y-1$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-1} = \frac{1}{y-1}$$

et donc $x \neq y \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} \neq \frac{1}{y-1}$.

2. On suppose que $\mathcal{P} = \{\text{nombres premiers}\}$ est fini :

$$\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots p_n\} \subset \mathbb{N}^*$$

Alors $p = p_1 p_2 \dots p_n + 1 > \max(p_1, \dots p_n)$

et aucun des p_k, $k \in [\![1;n]\!]$, ne divise p. En effet,
$p_k | p \Rightarrow p_k | 1 \Rightarrow p_k = 1$, c'est exclu.
Mais alors, p n'admet aucun diviseur premier, et a fortiori aucun diviseur différent de 1 et de p ; p est donc premier, ce qui est absurde.

Conclusion : $\mathcal{P}$ est infini.

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que $f = f_p + f_i$, f_p paire, f_i impaire.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $f(x) = f_p(x) + f_i(x)$
$f(-x) = f_p(x) + f_i(-x) = f_p(x) - f_i(x)$

$$\Rightarrow f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad f_i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Réciproquement, on pose $f_p : x \longmapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2}$, $f_i : x \longmapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2}$

On vérifie que f_p est paire et que f_i est impaire, et que $f = f_p + f_i$.