$\boxed{\text{TD 7}}$ Feuille a.

$\boxed{\text{Ex 1}}$: 1. $i^0 = 1$
$i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = -i$
$i^4 = i^0 = 1$
$i^5 = i^1 = i$
$\vdots$

Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1er cas : $\exists k \in \mathbb{Z}$ tq $n = 4k \Rightarrow i^n = (i^4)^k = 1$

2e cas : $\exists k \in \mathbb{Z}$ tq $n = 4k+1 \Rightarrow i^n = i^{4k+1} = i^{4k}\, i = i$

3e cas : $\exists k \in \mathbb{Z}$ tq $n = 4k+2 \Rightarrow i^n = i^{4k}\, i^2 = -1$

4e cas : $\exists k \in \mathbb{Z}$ tq $n = 4k+3 \Rightarrow i^n = i^{4k}\, i^3 = -i$.

2. $(1+i)^8 = ((1+i)^2)^4 = (2i)^4 = 16$.

$\boxed{\text{Ex 2}}$: 1. $z = \dfrac{4-5i}{3+i} = \dfrac{(4-5i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \dfrac{12-5+i(-15-4)}{9+1} = \dfrac{7}{10} - i\dfrac{19}{10}$

donc $\bar{z} = \dfrac{4+5i}{3-i} = \dfrac{7}{10} + i\dfrac{19}{10}$, $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{7}{10}$, $\mathrm{Im}(z) = -\dfrac{19}{10}$

2. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{1}{5}\}$. $w = \dfrac{2z^2-i}{5z+1}$, $\bar{w} = \overline{\left(\dfrac{2z^2-i}{5z+1}\right)} = \dfrac{\overline{2z^2-i}}{\overline{5z+1}} = \dfrac{\overline{2z^2}+i}{\overline{5z}+1}$

$= \dfrac{2\,\overline{z^2}+i}{5\bar{z}+1} = \dfrac{2(\bar{z})^2+i}{5\bar{z}+1}$.

$\boxed{\text{Ex 3}}$: 1. $z \in \mathbb{C}^*$. Il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tq $z = a+ib$,

et donc $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a+ib} = \dfrac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - i\dfrac{b}{a^2+b^2}$

2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $(c,d) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$(a+ib)(x+iy) = ax - by + i(ay+bx)$, donc

$$\begin{cases} ax - by = c \\ ay + bx = d \end{cases} \Leftrightarrow (a+ib)(x+iy) = c+id \Leftrightarrow x+iy = \frac{c+id}{a+ib} = (c+id)\left(\frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{a^2+b^2}(ac+bd) \\ y = \dfrac{1}{a^2+b^2}(ad-bc) \end{cases}$$

$\boxed{\text{Ex 4}}$: $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

1. $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $a_k \in \mathbb{R}$ $\forall k \in [\![0;n]\!]$

Soit $z \in \mathbb{C}$. $P(z) = 0 \Rightarrow \overline{P(z)} = 0 = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z^k} = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z^k}$

$= \sum_{k=0}^{n} a_k (\bar{z})^k = P(\bar{z})$

donc $P(z)=0 \Rightarrow P(\bar{z})=0$.

2. $j\bar{j} = \left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4}+\frac{3}{4} = 1$

$j+\bar{j} = 2\mathrm{Re}(j) = -1$.

3. On remarque que ~~...~~ $\bar{j} = -1-j$, et donc $j(-1-j) = j\bar{j} = 1$.

ou $-j-j^2 = 1 \Rightarrow 1+j+j^2=0$

donc j est solution de $1+z+z^2=0$. Comme $P = 1+X+X^2$ est un polynôme à coefficients réels, on en déduit que $\bar{j}$ est l'autre solution.

4. $z\in\mathbb{C}$, $z^3 = 1 \Leftrightarrow z^3-1=0$

$\Leftrightarrow (z-1)(z^2+z+1)=0$

$\Leftrightarrow z\in\{1,j,\bar{j}\}$.

5. On a ~~...~~ $\left(\frac{1}{j}\right)^3 = \frac{1}{j^3} = 1$, donc $\frac{1}{j}\in\{1;j;\bar{j}\}$

$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{j}=1 \Rightarrow j=1\text{, exclu}\\ \frac{1}{j}=j \Rightarrow j^2=1 \Rightarrow j=\pm 1\text{, exclu}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{j}=\bar{j}$

De la même manière $(j^2)^3 = (j^3)^2 = 1 \Rightarrow j^2\in\{1;j;\bar{j}\}$

$\Rightarrow j^2=\bar{j}$.

$\boxed{\text{Ex 5}}$: Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{i\}$, $z=a+ib$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,1)\}$

$\frac{iz-1}{z-i}\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}\left(\frac{iz-1}{z-i}\right)=0$

Or, $\frac{iz-1}{z-i} = \frac{i(a+ib)-1}{(a+ib)-i} = \frac{-b-1+ia}{a+i(b-1)} = \frac{(-b-1+ia)(a-i(b-1))}{a^2+(b-1)^2}$

$= \frac{\cancel{-ba}-a+\cancel{ab}-a+i(-1+b^2+a^2)}{a^2+(b-1)^2}$

$= \frac{-2a}{a^2+(b-1)^2} + i\,\frac{a^2+b^2-1}{a^2+(b-1)^2}$

donc $\frac{iz-1}{z-i}\in\mathbb{R} \Leftrightarrow a^2+b^2-1=0$

$\Leftrightarrow |z|^2=1$

$\Leftrightarrow |z|=1$

donc $\{z \in \mathbb{C} / \frac{iz-1}{z-i} \in \mathbb{R}\} = \mathbb{U} \setminus \{i\}$.

$\boxed{\text{Ex } 6}$ $z^2 = \bar{z} \Rightarrow |z|^2 = |z|$
$\Rightarrow |z| \in \{0,1\}$.

$z=0$ est une solution évidente. On suppose maintenant que $z \neq 0$ et que $z^2 = \bar{z}$, alors $|z| = 1$, mais dans ce cas, $\frac{1}{z} = \bar{z}$. (c.f. ex3)

Par conséquent, $z^2 = \frac{1}{z} \Leftrightarrow z^3 = 1 \Leftrightarrow z \in \{1 ; j ; \bar{j}\}$ (c.f. ex 4)

Finalement, $\{z \in \mathbb{C},\ z^2 = \bar{z}\} = \{0, 1, j, \bar{j}\}$.

$\boxed{\text{Ex } 7}$: Soit $z \in \mathbb{C}$. $z = a+ib$

$$|z-i| = |z+i| \Leftrightarrow |z-i|^2 = |z+i|^2$$
$$\Leftrightarrow a^2 + (b-1)^2 = a^2 + (b+1)^2$$
$$\Leftrightarrow b^2 - 2b + 1 = b^2 + 2b + 1$$
$$\Leftrightarrow b = 0.$$

$\boxed{\text{Ex } 8}$: Soient $z, z' \in \mathbb{C}$, $|z| = |z'| = 1$, $zz' \neq -1$.

$$\frac{z+z'}{1+zz'} = \frac{(z+z')(1+\overline{zz'})}{(1+zz')(1+\overline{zz'})} = \frac{z + z' + z\bar{z}\bar{z}' + z'\bar{z}'\bar{z}}{|1+zz'|^2}$$

$$= \frac{z + z' + |z|^2\bar{z}' + |z'|^2\bar{z}}{|1+zz'|^2} = \frac{z+z'+\bar{z}+\bar{z}'}{|1+zz'|^2}$$

$$= \frac{2\,\mathrm{Re}(z+z')}{|1+zz'|^2} \in \mathbb{R}$$

et $\left|\frac{z+z'}{1+zz'}\right| = \frac{2\,|\mathrm{Re}(z+z')|}{|1+zz'|^2}$

$\boxed{\text{Ex } 9}$: Soient $u, v, w \in \mathbb{U}$. Alors, on l'a vu dans l'ex 3,

$$\frac{1}{u} = \bar{u},\quad \frac{1}{v} = \bar{v} \text{ et } \frac{1}{w} = \bar{w}.$$

Alors $|u+v+w| = |\overline{u+v+w}| = \left|\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w}\right| = |uvw| \left|\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w}\right|$
$= |vw + uw + uv|$

car $|uvw| = |u||v||w| = 1$.

$\boxed{\text{Ex } 10}$: Soient $u, v \in \mathbb{U}$, $u \neq v$, et soit $z \in \mathbb{C}$.

On montre que $\frac{z + uv\bar{z} - (u+v)}{u-v}$ est imaginaire pur.

À nouveau, comme $u, v \in \mathbb{U}$, $\bar{u} = \frac{1}{u}$, $\bar{v} = \frac{1}{v}$

et donc

$$\overline{\frac{z + uv\bar{z} - (u+v)}{u-v}} = \frac{\bar{z} + \bar{u}\bar{v}z - (\bar{u}+\bar{v})}{\bar{u}-\bar{v}} = \frac{\bar{z} + \frac{1}{uv}z - \left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right)}{\frac{1}{u}-\frac{1}{v}} = \frac{uv\bar{z} + z - (v+u)}{v-u}$$

$$= -\left(\frac{z + uv\bar{z} - (u+v)}{u-v}\right)$$

$$\Rightarrow 2\mathrm{Re}\left(\frac{z + uv\bar{z} - (u+v)}{u-v}\right) = \frac{z + uv\bar{z} - (u+v)}{u-v} + \overline{\frac{z + uv\bar{z} - (u+v)}{u-v}} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{z + u\bar{v} - (u+v)}{u-v}\right)^2 \in \mathbb{R}_-$$

$\boxed{\text{Ex } 11}$: 1. $P = X^3 + aX^2 + bX + c$, $a, b, c \in \mathbb{C}$

Soit $t \in \mathbb{C}$. $P(X+t) = (X+t)^3 + a(X+t)^2 + b(X+t) + c$

$$= (X^3 + 3tX^2 + 3t^2X + t^3) + a(X^2 + 2tX + t^2) + bX + bt + c$$

$$= X^3 + (3t+a)X^2 + (3t^2 + 2at + b)X + t^3 + at^2 + bt + c$$

donc, pour $t = -\frac{a}{3}$, $P(X+t) = X^3 + 3pX + q$,

avec $p = t^2 + \frac{2}{3}at + \frac{b}{3} = \frac{a^2}{9} - \frac{2}{9}a^2 + \frac{b}{3} = -\frac{a^2}{9} + \frac{b}{3}$

et $q = t^3 + at^2 + bt + c = -\frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} - \frac{ab}{3} + c = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c.$

2. Soient α, β les deux racines de $X^2 + qX - p^3$, et $\{z \in \mathbb{C}, z^3 = \alpha\} = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$
On suppose $\alpha \neq 0$.

(a) α et β sont racines de $X^2 + qX - p^3$

$$\Rightarrow (X-\alpha)(X-\beta) = X^2 + qX - p^3$$

$$\Rightarrow X^2 - (\alpha+\beta)X + \alpha\beta = X^2 + qX - p^3$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \alpha+\beta = -q \\ \alpha\beta = -p^3 \end{vmatrix}$$

(b) Soit $\gamma \in \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$.

$$R\left(\gamma - \frac{p}{\gamma}\right) = \left(\gamma - \frac{p}{\gamma}\right)^3 + 3p\left(\gamma - \frac{p}{\gamma}\right) + q = \gamma^3 - 3\gamma^2\frac{p}{\gamma} + 3\gamma\left(\frac{p}{\gamma}\right)^2 - \left(\frac{p}{\gamma}\right)^3 + 3p\gamma - 3\frac{p^2}{\gamma} + q$$

$$= \alpha - \cancel{3p\gamma} + \cancel{3\frac{p^2}{\gamma}} - \frac{p^3}{\alpha} + \cancel{3p\gamma} - \cancel{3\frac{p^2}{\gamma}} + q$$

$$= \alpha + \frac{\alpha\beta}{\alpha} - (\alpha+\beta) = \alpha + \beta - (\alpha+\beta) = 0$$

Par conséquent $\forall k \in \{1,2,3\}$, $R\left(\gamma_k - \frac{p}{\gamma_k}\right) = 0$, et on a trouvé les trois racines de R.

3. $P = X^3 + 3X^2 + 6X + 2$

a) On pose $R = P(X-1) = \cancel{X^3 - 3X^2 + 3X - 1 + 6X - 6} + 2$

$$= X^3 - \cancel{3X^2} + 3X - 1 + \cancel{3X^2} - \cancel{6X} + 3 + \cancel{6X} - 6 + 2$$

$$= X^3 + 3X - 2$$

b) On commence par déterminer les racines de

$$X^2 - 2X - 1$$

Le discriminant est $\Delta = 4 + 4 = 8$, donc le polynôme admet deux racines distinctes,

$$\alpha = \frac{2+\sqrt{8}}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{2-\sqrt{8}}{2}$$

$$\alpha = 1 + \sqrt{2} \qquad \beta = 1 - \sqrt{2}.$$

Par conséquent, les racines de R sont, si on pose $\gamma = \alpha^{1/3}$,

$$\left\{ \gamma - \frac{1}{\gamma},\ \gamma e^{i\frac{2\pi}{3}} - \frac{1}{\gamma e^{i\frac{2\pi}{3}}},\ \gamma e^{i\frac{4\pi}{3}} - \frac{1}{\gamma e^{i\frac{4\pi}{3}}} \right\}$$

et, comme $P(X) = R(X+1)$, les racines de P sont

$$\left\{ \gamma - \frac{1}{\gamma} - 1,\ \gamma e^{i\frac{2\pi}{3}} - \frac{1}{\gamma e^{i\frac{2\pi}{3}}} - 1,\ \gamma e^{i\frac{4\pi}{3}} - \frac{1}{\gamma e^{i\frac{4\pi}{3}}} - 1 \right\}.$$

$\boxed{\text{Ex 12}}$: a) $\Delta_1 = 3 + 4i$

On résout l'exercice sans utiliser les formes polaires, mais c'est, en général, plus faciles avec.

On cherche $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tq $(a+ib)^2 = 3 + 4i$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a^4 - a^2b^2 - 3a^2 = 0 \\ ab = 2 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a^4 - 3a^2 - 4 = 0 \\ ab = 2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow a^2 \in \left\{ \frac{3+5}{2}, \frac{3-5}{2} \right\} \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2 \Rightarrow b = \pm 1$$

Réciproquement, on vérifie que $(2+i)^2 = (-2-i)^2 = 3 + 4i$, donc ce sont bien les racines de Δ_1.

b) $\Delta_2 = 8 - 6i$, $(a+ib)^2 = \Delta_2 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a^2 - b^2 = 8 \\ 2ab = -6 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a^4 - 8a^2 - 9 = 0 \\ ab = -3 \end{array} \right.$

$$\Rightarrow a^2 \in \left\{ \frac{8+10}{2}, \frac{8-10}{2} \right\}$$

$$\Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow \cancel{(a,b) \in \left\{ \left(9, -\tfrac{1}{3}\right), \left(-9, \tfrac{1}{3}\right) \right\}}$$

~~Réciproquement~~ $\cancel{\left\{\left(9, -\tfrac{1}{3}\right)\right\}^2}$ $\quad (a,b) \in \{ (3,-1), (-3,1) \}$

Réciproquement, $(3-i)^2 = (-3+i)^2 = 8-6i$.

c) $\Delta_3 = -25 \Rightarrow \{ z \in \mathbb{C} \,/\, z^2 = \Delta_3 \} = \{ -5i, 5i \}$

d) $\Delta_4 = 49 \Rightarrow \{ z \in \mathbb{C} \,/\, z^2 = \Delta_4 \} = \{ 7, -7 \}$

e) $\Delta_5 = 50i$. On peut résoudre le système, ou bien se rappeler que $(1+i)^2 = 2i$, et donc $\Delta_5 = 25 \cdot 2i = (5(1+i))^2$

donc $\{ z \,/\, z^2 = \Delta_5 \} = \{ 5+5i, -5-5i \}$.

$\boxed{\text{Ex 13}}$: a) $z^2 + 2z + 10 = 0$

Discriminant : $\Delta = 4 - 40 = -36 < 0 \Rightarrow$ deux racines complexes,

$$z_1 = \frac{-2+6i}{2} = -1+3i, \quad z_2 = \frac{-2-6i}{2} = -1 - 3i$$

b) $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$

discriminant : $\Delta = -4 - 4(2i-1) = -8i = -4(1+i)^2$
$= (2i(1+i))^2$
$= (2(i-1))^2$

$\Rightarrow$ deux racines complexes,

$$z_1 = \frac{2i + 2(i-1)}{2} = 2i - 1, \quad z_2 = \frac{2i - (2(i-1))}{2} = 1$$

c) $iz^2 + (4i-3)z + i - 5 = 0$

discriminant : $(4i-3)^2 - 4(i-5)i = -16 + 9 - 24i - 4i^2 + 20i$
$= \cancel{11} \; -3 - 4i$
$= -(3+4i)$
$= i^2(2+i)^2 \quad$ (c.f. ex 12)
$= (2i-1)^2$

$\Rightarrow$ deux racines

$$z_1 = \frac{-4i+3+2i-1}{2i} = \frac{-2i+2}{2i} = -1-i$$

$$z_2 = \frac{-4i+3-2i+1}{2i} = \frac{-6i+4}{2i} = -3-2i$$

$\boxed{\text{Ex 14}}$ $\quad z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0 \quad (*)$

$z = a+ib$ est solution de $(*)$ $\iff a^2 - b^2 + 2iab - 2a + 2ib + 1 = 0$

$$\iff \begin{cases} a^2 - b^2 - 2a + 1 = 0 \\ 2ab + 2b = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a^2 - b^2 - 2a + 1 = 0 \\ 2b(1+a) = 0 \end{cases}$$

$\iff \left(a = -1 \text{ et } a^2 - b^2 - 2a + 1 = 0\right)$ ou $\left(b = 0 \text{ et } (a^2 - b^2 - 2a + 1 = 0)\right)$

$\iff (a = -1 \text{ et } -b^2 + 4 = 0)$ ou $(b = 0 \text{ et } a^2 - 2a + 1 = 0)$

$\iff (a = -1 \text{ et } b^2 = 4)$ ou $(b = 0 \text{ et } (a-1)^2 = 0)$

$\iff (a,b) \in \{(-1,2), (-1,-2), (1,0)\}$

$\boxed{\text{Ex 15}}$: $z^3 + (1-3i)z^2 - (6-i)z + 10i = 0$

1. On suppose que $z_0 \in \mathbb{R}$ est racine de cette équation.

Dans ce cas, $\operatorname{Im}\left(z_0^3 + (1-3i)z_0^2 - (6-i)z_0 + 10i\right) = -3z_0^2 + z_0 + 10 = 0$

$\operatorname{Re}\left(\_\_\_\_\_\_\_\_ \right) = z_0^3 + z_0^2 - 6z_0 = 0$

$\implies -3z_0^3 + z_0^2 + 10z_0 + 3(z_0^3 + z_0^2 - 6z_0) = 0 = 4z_0^2 - 8z_0$

$\implies z_0(z_0 - 2) = 0$

$\implies z_0 \in \{0, 2\}$

Réciproquement, il est clair que 0 n'est pas une solution.

$$8 + 4(1-3i) - 2(6-i) + 10i = 8 + 4 - 12 + i(-12 + 2 + 10) = 0$$

donc 2 est l'unique solution réelle.

2.
$$\begin{array}{l|l} z^3 + (1-3i)z^2 - (6-i)z + 10i & z-2 \\ \cline{2-2} -(z^3 - 2z^2) & z^2 + (3-3i)z - 5i \\ \cline{1-1} \quad (3-3i)z^2 - (6-i)z + 10i & \\ \quad -\left((3-3i)z^2 - 2(3-3i)z\right) & \\ \cline{1-1} \qquad -5iz + 10i & \end{array}$$

donc $z^3 + (1-3i)z^2 - (6-i)z + 10i = (z-2)(z^2 + (3-3i)z - 5)$

3. On cherche les racines de
$$z^2 + (3-3i)z - 5i.$$

discriminant : $(3-3i)^2 + 20i = 9 - 9 - 18i + 20i$

$= 2i = (1+i)^2$

donc on trouve deux racines :

$$z_1 = \frac{-3+3i+1+i}{2} = -1+2i$$

$$z_2 = \frac{-3+3i-1-i}{2} = -2+i$$

Ainsi, $z^3 + (1-3i)z^2 - (6-i)z + 10i = 0 \iff z \in \{2, -1+2i, -2+i\}$.

$\boxed{\text{TD7}}$ Feuille 6

$\boxed{\text{Ex 2}}$: 1. $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i} = \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}} = e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot \dfrac{1}{e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{6}}$

donc $\left|\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}\right| = 1$ et $\arg\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}\right) = \dfrac{\pi}{6}$ $[2\pi]$.

2. $1+i\sqrt{3} = 2\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

et $1-i = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$

donc $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^4 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{3}} e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4 = \left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^4 = 4e^{i\frac{7\pi}{3}}$

$\boxed{\text{Ex 3}}$: Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $z = e^{i\theta}$. On suppose que $\theta \in [0;2\pi[$

$$1+z+z^2 = 1 + e^{i\theta} + e^{i2\theta} = e^{i\theta}(e^{-i\theta} + 1 + e^{i\theta})$$
$$= e^{i\theta}(2\cos(\theta) + 1)$$

donc si $\theta \in]\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}[$, $2\cos(\theta) < -1$

et donc $1+z+z^2 = -e^{i\theta}(-2\cos\theta - 1)$

$= e^{i(\theta+\pi)} \underbrace{(-2\cos(\theta) - 1)}_{\in \mathbb{R}_+^*}$

c'est la form polaire

si $\theta \in [0;2\pi[\setminus]\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}[$, $1+z+z^2 = e^{i\theta}\underbrace{(2\cos(\theta)+1)}_{\in \mathbb{R}_+^*}$

c'est la form polaire.

Si $\theta \notin [0;2\pi[$, on peut s'y ramener en posant $\theta - 2k\pi$ pour un $k \in \mathbb{Z}$ bien choisi.

$\boxed{\text{Ex 4}}$: a) $n \in \mathbb{N}$, $(1+i)^n = \left(\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}\right)^n = 2^{\frac{n}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}n} \in \mathbb{R}$

ssi $\frac{\pi}{4} n \in \pi\mathbb{Z}$

ssi $n \in 4\mathbb{N}$.

b) $(\sqrt{3}+i)^n = \left(2 e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n = 2^n e^{i\frac{\pi}{6}n} \in \mathbb{R} \iff \frac{\pi}{6} n \in \pi\mathbb{Z}$

$\iff n \in 6\mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Ex 5}}$: 1. Soit $\theta \in]-\pi;\pi[$, $t = \tan(\theta/2)$

$$e^{i\theta} = e^{i\theta/2 + i\theta/2} = \frac{e^{i\theta/2}}{e^{-i\theta/2}} = \frac{\cos(\theta/2) + i\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2) - i\sin(\theta/2)}$$

$\theta \in]-\pi;\pi[\Rightarrow \frac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\Rightarrow \cos(\theta/2) \neq 0$, et donc

$$e^{i\theta} = \frac{1 + i\tan(\theta/2)}{1 - i\tan(\theta/2)} = \frac{1+it}{1-it}.$$

Par conséquent, $e^{i\theta} = \frac{(1+it)(1+it)}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2} + 2i\frac{t}{1+t^2}$

et donc $\cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2}$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $\theta = \arctan(x) \in]\pi/2;\pi/2[$.

Alors $\cos(2\theta) = \frac{1 - \tan^2(\theta)}{1 + \tan^2(\theta)} = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

et $\sin(2\theta) = \frac{2\tan(\theta)}{1+\tan^2(\theta)} = \frac{2x}{1+x^2}$

3. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Alors, comme $z \neq 0$, il existe $(\rho,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi;\pi[$

tq $z = \rho e^{i\theta} = \rho\cos(\theta) + \rho i \sin(\theta)$, et $\rho = |z|$.

~~On vérifie que~~

Posons $\tilde{\theta} = 2\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z) + |z|}\right)$, et vérifions que $\cos(\tilde{\theta}) = \cos(\theta)$

et $\sin(\tilde{\theta}) = \sin(\theta)$.

D'après 2., $\cos(\tilde{\theta}) = \frac{1 - \left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)+|z|}\right)^2}{1 + \left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)+|z|}\right)^2} = \frac{\mathrm{Re}(z)^2 + |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z)|z| - \mathrm{Im}(z)^2}{\mathrm{Re}(z)^2 + |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z)|z| + \mathrm{Im}(z)^2}$

$$= \frac{2\mathrm{Re}(z)^2 + 2\mathrm{Re}(z)|z|}{2|z|^2 + 2\mathrm{Re}(z)|z|} = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} = \cos(\theta)$$

et de même pour $\sin(\tilde{\theta})$. Par conséquent, $\theta = \tilde{\theta}$ puisque $\tilde{\theta} \in]-\pi;\pi[$, et donc $\arg(z) \equiv \tilde{\theta}\ [2\pi]$

$$\equiv 2\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)+|z|}\right)$$

$\boxed{\text{Ex } 6}$: a) $z^3 = -8i = 2^3 i^3$ $\Rightarrow$ racine évidente, $2i$

$\Rightarrow$ les solutions sont donc $2i \cdot \mathbb{U}_3$

$$= \left\{2i,\ 2ie^{i\frac{2\pi}{3}},\ 2ie^{i\frac{4\pi}{3}}\right\}.$$

b) $z^5 - z = 0 \Leftrightarrow z(z^4-1) = 0$

$\Leftrightarrow z = 0$ ou $z^4 = 1$

$\Leftrightarrow z \in \{0, 1, i, -1, -i\}$.

c) $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$. On vérifie facilement que 1 n'est pas une solution. Supposons alors $z \neq 1$.

$$27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^6 = -27 = i^2\, 3^3 = i^4 i^2\, \sqrt{3}^6 = (i\sqrt{3})^6$$

$$\Leftrightarrow \frac{z+1}{z-1} \in i\sqrt{3}\, \mathbb{U}_6$$

Or, $\frac{z+1}{z-1} = \omega \in \mathbb{C} \Leftrightarrow (z+1) = (z-1)\omega \Leftrightarrow z(\omega - 1) = \omega + 1$

$\Leftrightarrow \omega \neq 1$ et $z = \frac{\omega+1}{\omega-1}$

Comme de plus on a, $\forall\, \omega \in i\sqrt{3}\,\mathbb{U}_6, \omega \neq 1$, on en déduit que les solutions de l'équation sont

$$\left\{ \frac{i\sqrt{3}\,\omega + 1}{i\sqrt{3}\,\omega - 1},\ \omega \in \mathbb{U}_6 \right\}.$$

d) $z^2 \bar{z}^7 = 1 \Rightarrow |z|^2 |\bar{z}|^7 = 1$

$\Rightarrow |z|^9 = 1 \Rightarrow |z| = 1$

Par conséquent, $z^2\bar{z}^7 = 1 \Leftrightarrow z^2 \bar{z}^2 \bar{z}^5 = 1$

$\Leftrightarrow |z|^4 \bar{z}^5 = 1$

$\Leftrightarrow \bar{z}^5 = 1$

$\Leftrightarrow z^5 = 1$

$\Leftrightarrow z \in \mathbb{U}_5 = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{5}},\ k \in [\![0;4]\!] \right\}$

e) $z^6 - (3+2i)z^3 + 2 + 2i = 0$

$\Leftrightarrow z^3$ est solution du polynôme du second degré $X^2 - (3+2i)X + 2 + 2i$

discriminant : $(3+2i)^2 - 4(2+2i) = 9-4+12i-8-8i$
$= -3+4i$
$= (1+2i)^2$

donc les racines du polynôme sont $X_1 = \dfrac{3+2i-(1+2i)}{2} = 1$

et $X_2 = \dfrac{3+2i+(1+2i)}{2} = 2+2i$

et finalement, $z \in \mathbb{C}$ est solution de l'équation

$$\Leftrightarrow z \in \mathbb{U}_3 \cup (2+2i)\mathbb{U}_3 = \{1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}, (2+2i), (2+2i)e^{i\frac{2\pi}{3}}, (2+2i)e^{i\frac{4\pi}{3}}\}.$$

$\boxed{\text{Ex7}}$: Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1. $$\sum_{z\in\mathbb{U}_n} z = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \begin{cases} 1 & \text{si } n=1 \\ \dfrac{\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^n - 1}{e^{i\frac{2\pi}{n}}-1} = 0 & \text{si } n>1, \text{ car } e^{i\frac{2\pi}{n}} \neq 1. \end{cases}$$

2. $$\prod_{z\in\mathbb{U}_n} z = \prod_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1} i\frac{2k\pi}{n}\right)$$
$$= \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\sum_{k=0}^{n} k\right) = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\,\frac{n(n-1)}{2}\right)$$
$$= \exp\left(i\pi(n-1)\right) = (-1)^{n-1}$$

3. Soit $\omega = e^{i2\pi/n}$, et soit $j \in [\![1; n-1]\!]$ si $n \geqslant 2$.
$$\sum_{k=0}^{n-1} (\omega^j)^k = \frac{1-(\omega^j)^n}{1-\omega^j} \quad \text{car } \omega^j = e^{\frac{i2\pi j}{n}} \neq 1$$

et comme $(\omega^j)^n = e^{i2\pi j} = 1$, on en déduit que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (\omega^j)^k = 0$

Par contre, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (\omega^0)^k = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$, et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (\omega^n)^k = \sum 1 = n$,

et donc $$\sum_{k=0}^{n-1} (1+\omega^k)^n = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}(\omega^k)^j = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\sum_{k=0}^{n-1}(\omega^j)^k$$
$$= \binom{n}{0}n + \binom{n}{n}n = 2n.$$

$\boxed{\text{Ex 8}}$: Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$* \sum_{k=0}^{18} \left(z - e^{2ik\pi/19}\right)^2 = \sum_{k=0}^{18} \left(z^2 - 2z e^{i\frac{2k\pi}{19}} + e^{i\frac{4k\pi}{19}}\right)$$

$$= 19 z^2 - 2z \sum_{k=0}^{18} e^{i\frac{2k\pi}{19}} + \sum_{k=0}^{18} e^{i\frac{4k\pi}{19}}$$

$$= 19 z^2 - 2z \underbrace{\left(\frac{1-e^{i2\pi}}{1-e^{i\frac{2\pi}{19}}}\right)}_{=0} + \underbrace{\frac{1-e^{i4\pi}}{1-e^{i\frac{4\pi}{19}}}}_{=0} = 19 z^2$$

car $e^{i\frac{2\pi}{19}} \neq 1$

et $e^{i\frac{4\pi}{19}} \neq 1$

$$* \sum_{k=0}^{18} \left|z - e^{2ik\pi/19}\right|^2 = \sum_{k=0}^{18} |z|^2 + 1 - z\overline{e^{i\frac{2k\pi}{19}}} - \overline{z} e^{i\frac{2k\pi}{19}}$$

$$= 19(|z|^2+1) - z\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{18} e^{-i\frac{2k\pi}{19}}\right)}_{=0} + \overline{z}\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{18} e^{i\frac{2k\pi}{19}}\right)}_{=0}$$

$$= 19(|z|^2+1)$$

$\boxed{\text{Ex 9}}$: $z_1 = \dfrac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = 1+i$, $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$

1. $|z_1|^2 = \frac{1}{4}(6+2) = 2$, donc $z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$= \sqrt{2}\, e^{i\pi/6}$$

$|z_2|^2 = 2 \Rightarrow z_2 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$

$z_3 = z_1/z_2 = e^{i\pi/6} e^{-i\pi/4} = e^{-i\frac{\pi}{12}}$

2. D'après 1, $\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) = \mathrm{Re}(z_3)$ et $\sin\left(\frac{-\pi}{12}\right) = \mathrm{Im}(z_3)$, donc, on calcule z_3 :

$$z_3 = \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2(1+i)} = \frac{(\sqrt{6}+i\sqrt{2})(1-i)}{2(1+1)} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)$$

Finalement, $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

$\boxed{\text{Ex 10}}$: $z^2 = 1+i$, $z \in \mathbb{C}$.

$z = a+ib$ vérifie $z^2 = 1+i$

$$\iff \begin{cases} a^2-b^2 = 1 \\ 2ab = 1 \\ a^2+b^2 = |1+i| = \sqrt{2} \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{2} \\ b^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \\ ab > 0 \end{cases}$$

donc $z = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)$

2. $1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$

donc $z^2 = 1+i \iff z = \pm 2^{\frac{1}{4}} e^{i\pi/8}$

Comme $Re\left(e^{i\pi/8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$, on en déduit que

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}}\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$$

$\boxed{\text{Ex 11}}$: $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$

1. $\omega + \frac{1}{\omega} = \omega + \overline{\omega} = 2Re(\omega) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

2. $$\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)^2 + \left(\omega+\frac{1}{\omega}\right) - 1 = \omega^2 + 2 + \frac{1}{\omega^2} + \omega + \frac{1}{\omega} - 1$$
$$= \omega^2 + \omega + 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2}$$
$$= \frac{1}{\omega^2}\Big(\underbrace{\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1}_{\substack{= \text{somme des racines 5e de l'unité} \\ =0}}\Big)$$

3. Par conséquent, $2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est racine du polynôme X^2+X-1,

donc $2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \in \left\{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$

Comme $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$, on en conclut que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

$\boxed{\text{Ex 12}}$: 1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, et soit $x \in \mathbb{R}$.

$$a\cos(x) + b\sin(x) = Re\left(ae^{ix} - ibe^{ix}\right)$$
$$= Re\left(e^{ix}(a-ib)\right)$$

Or, il existe $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $a-ib = re^{i\theta}$

Par conséquent, $a\cos(x) + b\sin(x) = Re\left(e^{ix} re^{i\theta}\right) = r\cos(\theta+x)$.

2. D'après la question précédente, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x) + \sin(x) = r\cos(x+\theta)$$

avec $r = |1-i| = \sqrt{2}$ et $\theta = \arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}$

donc $\cos(x)+\sin(x)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1 \iff \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\iff \left| \begin{array}{l} x-\frac{\pi}{4}\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi] \\ \text{ou}\quad x-\frac{\pi}{4}\equiv-\frac{\pi}{4}\ [2\pi] \end{array}\right.$$

$$\iff x\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

$$\text{ou}\quad x\equiv 0\ [2\pi].$$

Finalement, $\{x\in\mathbb{R},\ \sin(x)+\cos(x)=1\}=\{2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$

$\boxed{\text{Ex 13}}$: $\cos(2\varphi)=\mathrm{Re}\left(e^{i2\varphi}\right)=\mathrm{Re}\left(\left(e^{i\varphi}\right)^2\right)$

$$=\mathrm{Re}\left(\cos^2(\varphi)-\sin^2(\varphi)+2i\cos(\varphi)\sin(\varphi)\right)$$

$$=\cos^2(\varphi)-\sin^2(\varphi)$$

$$=2\cos^2(\varphi)-1.$$

$\left(e^{i\varphi}\right)^3=\cos^3(\varphi)+3i\cos^2(\varphi)\sin(\varphi)-3\cos(\varphi)\sin^2(\varphi)-i\sin^3(\varphi)$

donc $\sin(3\varphi)=\mathrm{Im}\left(\left(e^{i\varphi}\right)^3\right)=3\cos^2(\varphi)\sin(\varphi)-\sin^3(\varphi)$

$$=3\left(1-\sin^2(\varphi)\right)\sin(\varphi)-\sin^3(\varphi)$$

$$=-4\sin^3(\varphi)+3\sin(\varphi)$$

$\boxed{\text{Ex 14}}$: Soit $n\in\mathbb{N}$ et $\theta\in\mathbb{R}$.

$\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}e^{ik\theta}\right)$, donc on calcule $\sum_{k=0}^{n}e^{ik\theta}$.

Si $\theta\in 2\pi\mathbb{Z}$, $e^{i\theta}=1$ et donc $\sum_{k=0}^{n}e^{ik\theta}=n+1$. $\Rightarrow \sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)=n+1$, $\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)=$

Sinon, $\sum_{k=0}^{n}e^{ik\theta}=\dfrac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}=\dfrac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta}\left(e^{-i\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta}-e^{i\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta}\right)}{e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2}\right)}$

$$=e^{i\frac{n\theta}{2}}\frac{-2i\sin\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta\right)}{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$=e^{i\frac{n\theta}{2}}\frac{\sin\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

et donc $\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)=\dfrac{\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\sin\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ et $\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)=\dfrac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)}{2}\theta\right)}{\sin(\theta/2)}$.

TD7 feuille c

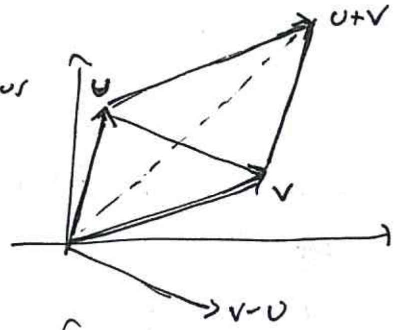
Ex 1 : Soient $u, v \in \mathbb{C}$.

$$|u+v|^2 = (u+v)(\overline{u+v}) = u\bar{u} + v\bar{v} + u\bar{v} + \bar{u}v$$
$$= |u|^2 + |v|^2 + 2Re(u\bar{v})$$

et donc $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2|u|^2 + 2|v|^2 + 2Re(u\bar{v}) - 2Re(u\bar{v})$

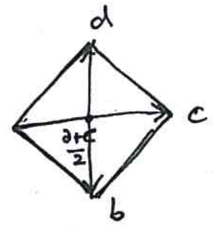
$$= 2(|u|^2 + |v|^2).$$

L'égalité porte ce nom car elle lie la longueur des côtés d'un parallélogramme à celle de ses diagonales.



Ex 2 : Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tq

$$\begin{cases} a+c = b+d \\ a+ib = c+id \end{cases}$$

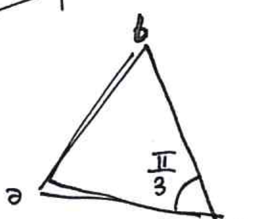


$a+c = b+d \Rightarrow$ les milieux des diagonales de $(abcd)$ coïncident, donc c'est un parallélogramme.

$a+ib = c+id \Rightarrow c-a = i(b-d) \Rightarrow$ les diagonales ont même module, et sont perpendiculaires. En effet, $z \longmapsto iz$ correspond à la rotation d'angle $\pi/2$.

On en conclut que $(abcd)$ est un carré.

Ex 3 $a, b, c \in \mathbb{C}$, abc est un triangle équilatéral.



$\Rightarrow |b-a| = |c-a| = |c-b|$

De plus, $\arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. ou $\arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

On en déduit que $\cancel{\frac{c-b}{c-a} = e^{i\frac{\pi}{3}}}$ $\left(\frac{b-c}{a-c}\right)^3 = e^{i\pi} = -1.$

$$\left(\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3 = \left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^3 = -1 \right)$$

Ex 4 : $0 \leq \theta \leq \pi$.

1. $z^6 - 2z^3\cos(\theta) + 1 = 0 \iff z^3$ est racine du polynôme $X^2 - 2X\cos(\theta) + 1$.

discriminant : $\Delta = 4\cos^2(\theta) - 4 = -4\sin^2(\theta) \leq 0$

les racines sont : $X_1 = \frac{2\cos(\theta) + i2\sin(\theta)}{2}$, $X_2 = \frac{2\cos(\theta) - i2\sin(\theta)}{2}$

$X_1 = e^{i\theta}$ $\qquad X_2 = e^{-i\theta}$.

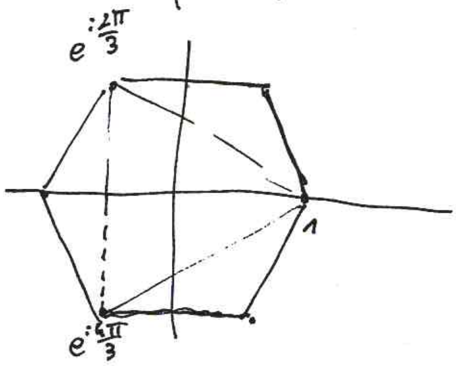
donc z est solution de l'équation

$$\iff z^3 \in \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$$

$$\iff z \in \{e^{i\theta}, e^{i\theta+\frac{2\pi}{3}}, e^{i\theta+\frac{4\pi}{3}}, e^{-i\theta}, e^{-i\theta+\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\theta+\frac{4\pi}{3}}\}$$

2. La rotation de centre O et ~~d~~ d'angle $+\theta$ transforme les hexagones en hexagones, donc $\{e^{i\theta}, e^{i\theta+i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\theta+i\frac{4\pi}{3}}, e^{-i\theta}, e^{-i\theta+i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\theta-i\frac{4\pi}{3}}$ est un hexagone ssi

$$H = \{e^{i2\theta}, e^{i2\theta+i\frac{4\pi}{3}}, e^{i2\theta+i\frac{4\pi}{3}}, 1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}\}$$ est un hexagone.



* Supposons que H est un hexagone. Calculons son centre :

$$\frac{1}{6}\sum_{z\in H} z = \frac{1}{6}\underbrace{\left(1+e^{i\frac{2\pi}{3}}+e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)}_{=0}\left(1+e^{i2\theta}\right)$$

et donc H est stable par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Par conséquent,

$$\{1, e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\pi}, e^{i\frac{4\pi}{3}}, e^{i\frac{5\pi}{3}}\} \subset H$$

d'où l'égalité puisque $\mathrm{Card}(H) = 6$. On en déduit que

$$e^{i2\theta} \in \{e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{i\pi}, e^{i\frac{5\pi}{3}}\},$$ et donc

que $\theta \in \{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\}$.

* Réciproquement, si $\theta \in \{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\}$, alors

$$\{e^{i2\theta}, e^{i2\theta+i\frac{2\pi}{3}}, e^{i2\theta+i\frac{4\pi}{3}}\} = \{e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{i\pi}, e^{i\frac{5\pi}{3}}\}$$

et donc H est un hexagone régulier.

* <u>Conclusion</u> : Les solutions de $z^6 - 2z^3\cos\theta + 1 = 0$ forment un hexagone régulier $\iff \theta \in \{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\}$.

$\boxed{\text{Ex 5}}$: 1. $v \in \mathbb{C}$ $\quad t_v : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z+v$

2. $h_{a,\lambda} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto a + \lambda(z-a)$

3. $r_{a,\theta} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto a + e^{i\theta}(z-a)$

4. $s_{a,\theta} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto e^{i2\theta}\left(\overline{z-a}\right)+a$

En effet, $s_{a,\theta}$ vérifie : si $z' = s_{a,\theta}(z)$,

$$e^{-i\theta}(z'-a) = \overline{e^{-i\theta}(z-a)}$$

car elle laisse notamment ~~les~~ invariants les z de la forme

$$z = a + t e^{i\theta},\ t \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{\text{Ex 6}}$: 1. a) $f_1(z) = z + 3 - 2i$: translation de vecteur d'affixe $3-2i$

b) $f_2(z) = e^{i2\pi/7} z$: rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{7}$

c) $f_3(z) = e^{i\frac{2\pi}{3}} z - 1$: on cherche un éventuel point fixe.

$$z = e^{i2\pi/3} z - 1 \iff z\left(1 - e^{i2\pi/3}\right) = -1$$

$$\iff z e^{i\pi/3}\left(e^{-i\pi/3} - e^{i\pi/3}\right) = -1$$

$$\iff z = \frac{1}{e^{i\pi/3}(e^{i\pi/3} - e^{-i\pi/3})} = \frac{e^{-i\pi/3}}{2i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{e^{-i\pi/3}}{i\sqrt{3}}$$

$$\iff z = \frac{1}{2i\sqrt{3}} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{i}{\sqrt{3}}\right).$$

donc f_3 est une rotation de centre ~~le~~ le point d'affixe $z = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}}$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

d) $f_4(z) = 3z - 5 + i$. On cherche un point fixe

$$z_0 = 3z_0 - 5 + i \iff 2z_0 = 5 - i$$

$$\iff z_0 = \frac{5}{2} - \frac{i}{2}$$

donc $f_4(z) - z_0 = f(z) - f(z_0)$

$$= 3(z - z_0)$$

et f_4 est une homothétie de centre le point d'affixe $\frac{5}{2} - \frac{i}{2}$ et de rapport 3.

e) $f_5(z) = (2+2i)z + 3i$. $\quad z_0 = f(z_0) \iff (1+2i)z_0 = -3i$

$$\iff z_0 = \frac{-3i}{1+2i} = \frac{-3i(1-2i)}{1+4} = -\frac{6}{5} - \frac{3i}{5}$$

$|2+2i| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\arg(2+2i) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

donc f_5 est la similitude de centre le point d'affixe $-\frac{6}{5} - \frac{3}{5}i$, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $2\sqrt{2}$.

2. a) $t_{-2+i} : z \longmapsto z - 2 + i$

b) symétrie centrale = rotation d'angle π,

donc $r_{i,\pi} : z \longmapsto i + e^{i\pi}(z - i) = 2i - z$

c) $r_{1,\pi/6} : z \longmapsto 1 + e^{i\pi/6}(z-1)$

d) $h_{1+2i,3} : z \longmapsto 1+2i + 3(z - (1+2i))$

e) $f : z \longmapsto 1+i + 2e^{i\pi/3}(z-1-i)$ $\quad (f = r_{1+i,\pi/3} \circ h_{1+i,2})$

3. * $\varphi_1(z) = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 3 = e^{i\pi/3} z + 3$

on cherche un point fixe:

$$\varphi_1(z_0) = z_0 \iff z_0 = e^{i\pi/3} z_0 + 3$$

$$\iff z_0 = \frac{3}{1 - e^{i\pi/3}} = \frac{3\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}$$

$$\iff z_0 = \frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

donc φ_1 est la rotation de centre le point d'affixe $z_0 = \frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

* $\varphi_2(z) = i\bar{z} = e^{i\frac{\pi}{2}}\bar{z}$ $\Rightarrow$ φ_2 est la symétrie d'axe passant par O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ par rapport à l'axe (Ox).

4. Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$. On note $s_{a,\theta}$ (et $s_{b,\varphi}$) les symétries par rapport aux axes passant par a (et b) et d'angle θ (et φ) par rapport à (Ox).

$z \in \mathbb{C}$, $s_{a,\theta}(z) = e^{i2\theta}\left(\overline{z-a}\right) + a$

$$\text{donc } s_{b,\varphi} \circ s_{a,\theta}(z) = e^{i2\varphi}\left(\overline{e^{i2\theta}(\overline{z-a}) + a - b}\right) + b$$

$$= e^{i2\varphi}\left(e^{-i2\theta}(z-a) + \bar{a} - \bar{b}\right) + b$$

$$= e^{i2(\varphi-\theta)} z + e^{i2\varphi}(\bar{a} - \bar{b}) + b.$$

donc $s_{b,\varphi} \circ s_{a,\theta}$ est une translation si $2(\varphi - \theta) \equiv 0 [2\pi]$, et une rotation sinon (d'angle $2(\varphi - \theta)$).

5. Soient $a,b \in \mathbb{C}$, $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$

$$z \in \mathbb{C}, \quad r_{a,\theta} \circ r_{b,\varphi}(z) = r_{a,\theta}\left(b + e^{i\varphi}(z-b)\right)$$
$$= a + e^{i\theta}\left(b + e^{i\varphi}(z-b) - a\right)$$
$$= e^{i(\theta+\varphi)} z + a + e^{i\theta}(b - a - e^{i\varphi} b)$$

donc $r_{a,\theta} \circ r_{b,\varphi}$ est une translation si $\theta + \varphi \equiv 0 \; [2\pi]$ et une rotation sinon.

$\boxed{\text{Ex 7}}$: s est une similitude directe $\Rightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ tq $\forall z \in \mathbb{C}, s(z) = az + b$

$$\begin{cases} s(2-i) = 1 \\ s(-1+2i) = 1+6i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(2-i) + b = 1 \\ a(-1+2i) + b = 1+6i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(3-3i) = -6i \\ b = 1 - a(2-i) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{-2i}{1-i} = \dfrac{-2i(1+i)}{2} = 1-i \\ b = 1 - (1-i)(2-i) = 1 - (2 - 3i - 1) = 3i \end{cases}$$

$a \neq 1$, donc s est la composée d'une rotation d'angle $\arg(a) = -\frac{\pi}{4}$ et d'une homothétie de rapport $|a| = \sqrt{2}$ de même centre z_0.

z_0 vérifie $z_0 = a z_0 + b \Leftrightarrow z_0 = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{3i}{1-(1-i)} = 3.$

$\boxed{\text{Ex 8}}$: 1. $\{z \longmapsto z + v, \; v \in \mathbb{C}\}$ est stable par composition. En effet, si $v, w \in \mathbb{C}$, $(t_v \circ t_w)(z) = t_v(z+w) = z + v + w$
$$= t_{v+w}(z)$$
donc $t_v \circ t_w = t_{v+w}$.

2. $\{\text{homothéties}\} = \{z \longmapsto az + b, \; (a,b) \in (\mathbb{R}^* \setminus \{1\} \times \mathbb{C}) \cup \{(1,0)\}\}$ n'est pas stable par composition. En effet, si $a, a' \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ et $b, b' \in \mathbb{C}$, et $h : z \longmapsto az + b$
$h' : z \longmapsto a'z + b'$,

$h \circ h' : z \longmapsto aa'z + ab' + b$ est une homothétie ssi
$$(aa' \neq 1) \text{ ou } (aa' = 1 \text{ et } ab' + b = 0)$$

Par exemple, $h_{0,2} \circ h_{1,1/2}(z) = 2\left(1 + \frac{1}{2}(z-1)\right)$
$= z + 1$, $h_{0,2} \circ h_{1,1/2}$ est une translation.

3. $\{ z \longmapsto az+b,\ a \in]1;+\infty[,\ b \in \mathbb{C} \}$ est stable par composition, c.f. 2.

4. $\{$ homothéties et translations $\}$ est stable par composition.
En effet, * 2. $\Rightarrow$ la composée de deux homothéties est une homothétie ou une translation,
* 1. $\Rightarrow$ la composée de deux translations est une translation,
* et on vérifie facilement que la composée d'une translation et d'une homothétie est une homothétie (ou une translation, lorsque l'homothétie est l'identité).

5. $\{$ symétries par rapport à des droites $\}$ n'est pas stable par composition. Si s est une symétrie, alors $s \circ s = id$.

6. $\{$ rotations $\}$ n'est pas stable par composition, c.f. Ex 6, 5.

7. $\{$ symétries et rotations $\}$ idem 6.

8. $\{$ symétries, rotations et translations $\}$
* symétrie $\circ$ symétrie $\Rightarrow$ rotation ou translation
* rotation $\circ$ rotation $\Rightarrow$ rotation ou translation (Ex 6, 4., 5)
* translation $\circ$ translation $\Rightarrow$ translation (1.)
* symétrie $\circ$ rotation, rotation $\circ$ symétrie $\Rightarrow$ symétrie
* rotation $\circ$ translation, translation $\circ$ rotation $\Rightarrow$ rotation
* symétrie $\circ$ translation, translation $\circ$ symétrie $\Rightarrow$ symétrie

donc l'ensemble est stable par composition.

9. $\{ z \longmapsto az+b,\ a \in \mathbb{C}^*,\ b \in \mathbb{C} \}$ est stable par composition

---

$\boxed{\text{Ex } 9}$: $r(z) = jz+3$, $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1. $r(z) = z \Leftrightarrow z = \dfrac{3}{1-j} = \dfrac{3}{\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} = 3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3e^{i\pi/3}$

$\Rightarrow r$ est une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et de centre le point d'affixe $3e^{i\pi/3}$.

2. $r(z) = 3e^{i\pi/3} + e^{i2\pi/3}\left(z - 3e^{i\pi/3}\right)$

$= 3e^{i\pi/3} + e^{i2\pi/3} z + 3$

donc $r^2(z) = 3\left(1+e^{i\pi/3}\right) + e^{i2\pi/3}\left(3\left(1+e^{i\pi/3}\right) + e^{i2\pi/3} z\right)$

$= 3\left(1+e^{i\pi/3}\right)\left(1+e^{i2\pi/3}\right) + e^{i4\pi/3} z$

donc r^2 est une rotation d'angle $\frac{4\pi}{3}$ (et de centre $3e^{i\pi/3}$)

3. $r^3(z) = 3\left(1+e^{i\pi/3}\right) + e^{i2\pi/3}\left(3\left(1+e^{i\pi/3}\right)\left(1+e^{i2\pi/3}\right) + e^{i4\pi/3} z\right)$

$= 3\left(1+e^{i\pi/3}\right)\underbrace{\left(1+e^{i2\pi/3}\left(1+e^{i2\pi/3}\right)\right)}_{= 1+e^{i2\pi/3}+e^{i4\pi/3} = 0} + z$

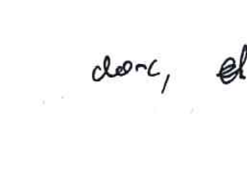
donc $r^3(z) = z$, r^3 est l'identité.

Par conséquent, $r^{-1} = r^2$.

$\boxed{\text{Ex 10}}$: $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$
$z \longmapsto 2\bar{z} + 3 - 4i$

1. $f(z) = z \iff z = 2\bar{z} + 3 - 4i$. On note $z = x+iy$, $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$

$\iff \begin{cases} x = 2x + 3 \\ y = -2y - 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -3 \\ 3y = -4 \end{cases} \iff (x,y) = \left(-3, -\frac{4}{3}\right)$

3. 

$\mathcal{C}$ = cercle de centre $1-i$ et de rayon 2

$= \{ z \in \mathbb{C} \ / \ |z-(1-i)|^2 = 4 \}$

$= \{ z \in \mathbb{C} \ / \ (\mathrm{Re}(z)-1)^2 + (\mathrm{Im}(z)+1)^2 = 4 \}$

donc, ~~dans~~ le plan $\mathbb{R}^2$, après identification de $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}^2$,

$\mathcal{C} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4 \}$.

4. $f(1-i) = 2(1+i) + 3 - 4i$.
$= 5 - 2i$

f est la composition ~~de~~ d'une symétrie $(z \mapsto \bar{z})$ et d'une homothétie de rapport 2

Par conséquent, l'image du cercle de centre $1-i$ et de rayon 2 est le cercle de centre $f(1-i)$ et de rayon 4.

On en déduit que

$$f(\mathcal{C}) = \{ z \in \mathbb{C} \ / \ |z-5+2i|^2 = 16 \}$$

ou, en coordonnées cartésiennes,

$$f(\mathcal{C}) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ (x-5)^2 + (y+2)^2 = 16 \}.$$

$\boxed{\text{Ex } 11}$:
$$f(z) = -z-2i$$
$$g(z) = 2z-1-i$$

1. $f(z) = z \iff 2z = -2i \iff z = -i$

   $g(z) = z \iff z = 1+i$

2. f est une homothétie de centre $-i$ et de rapport -1

   g est une ———— $1+i$ ———— 2.

3. $(f\circ g)(z) = -g(z) - 2i = -2z+1+i-2i$
$$= -2z+1-i$$

$$(f\circ g)(z) = z \iff 3z = 1-i \iff z = \frac{1-i}{3}$$

   donc $f\circ g$ est une homothétie de centre $\frac{1-i}{3}$ et de rapport -2.

4. $-i$, $1+i$ et $\frac{1-i}{3}$ sont alignés ssi il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

   tq $\alpha(1+i-(-i)) = \beta\left(\frac{1-i}{3} - (-i)\right)$

$$1+i-(-i) = 1+2i \ , \qquad \frac{1-i}{3} + i = \frac{1+2i}{3}$$

   donc $1+i-(-i) = 3\left(\frac{1-i}{3} - (-i)\right)$,

   ce qui prouve que ces points sont alignés.

$\boxed{\text{Ex } 12}$:

a) $|(1-i)z-3i| = 3 \iff |1-i|\left|z - \frac{3i}{1-i}\right| = 3$
$$\iff \sqrt{2}\left|z - \frac{3i(1+i)}{2}\right| = 3$$
$$\iff \left|z - \frac{3}{2}(i-1)\right| = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

donc $\{z \in \mathbb{C} \,/\, |(1-i)z - 3i| = 3\}$ est le cercle de centre $\frac{3}{2}(i-1)$ et de rayon $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

b) $\{z \,/\, |1-z| \leq 1/2\}$ = disque de centre 1 et de rayon $\frac{1}{2}$.

c) $Re(1-z) \leq \frac{1}{2} \iff 1 - Re(z) \leq \frac{1}{2}$

$\iff Re(z) \geq \frac{1}{2}$

donc $\{z \in \mathbb{C},\ Re(1-z) \leq \frac{1}{2}\}$ est le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} / Re(z) \geq \frac{1}{2}\}$

d) $Re(iz) = -Im(z)$, donc

$\{z \in \mathbb{C},\ Re(iz) \leq \frac{1}{2}\}$ est le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} / Im(z) \geq -\frac{1}{2}\}$

e) $|1 - \frac{1}{z}|^2 = 2 \iff |z-1|^2 = 2|z|^2$ et $z \neq 0$

$\iff |z|^2 - z - \bar{z} + 1 = 2|z|^2$ et $z \neq 0$

$\iff 2 = |z|^2 + z + \bar{z} + 1$ et $z \neq 0$

$\iff |z+1|^2 = 2$ (et $z \neq 0$)

donc $\{z \in \mathbb{C} / |1 - \frac{1}{z}|^2 = 2\}$ est le cercle de centre -1 et de rayon $\sqrt{2}$.

f) $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 1 \iff |z-3| = |z-5|$

$\iff z$ est sur la ~~bissectrice~~ médiatrice de 3 et 5.

donc $\{z \in \mathbb{C} / \left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 1\} = \{z \in \mathbb{C},\ Re(z) = 4\}$

g) $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 2 \iff |z-3|^2 = 4|z-5|^2$

$\iff |z|^2 - 3z - 3\bar{z} + 9 = 4|z|^2 - 20z - 20\bar{z} + 100$

$\iff 3|z|^2 - 17z - 17\bar{z} + 91 = 0$

$\iff |z|^2 - \frac{17}{3}z - \frac{17}{3}\bar{z} + \frac{91}{3} = 0$

$\iff |z - \frac{17}{3}|^2 - \frac{16}{9} = 0$

donc $\{z \in \mathbb{C} / \left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 2\}$ est le cercle de centre $\frac{17}{3}$ et de rayon $\frac{4}{3}$.

h) $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| < 2 \iff |z - \frac{17}{3}|^2 > \frac{16}{9}$

donc $\{z \in \mathbb{C} / \left|\frac{z-3}{z-5}\right| < 2\}$ est le complémentaire du disque (fermé) de centre $\frac{17}{3}$ et de rayon $\frac{4}{3}$.

$\boxed{\text{Ex } 13}$: Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\frac{1}{1+it} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2-1-it}{1+it}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-it}{1+it}\right)$$

et donc $\left|\frac{1}{1+it}\right| = \frac{1}{2}$.

d'où $\{\frac{1}{1+it}, t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{C}_{1/2, 1/2}$.

C'est une inclusion stricte, car $0 \in \mathcal{C}_{1/2,1/2}$, mais
$0 \notin \{\frac{1}{1+it}, t \in \mathbb{R}\}$.

On peut aller plus loin et affirmer que
$\{\frac{1}{1+it}, t \in \mathbb{R}\} = \mathcal{C}_{1/2,1/2} \setminus \{0\}$

car d'après l'exercice 5 de la feuille 6, si $\theta \in]-\pi;\pi[$ et
$t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, $\quad e^{i\theta} = \frac{1+it}{1-it}$

donc ~~$\{\frac{1}{1+it}, t \in \mathbb{R}\} =$~~

$$\left\{\frac{1}{1+it} - \frac{1}{2}, t \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\frac{1}{2} e^{-i\theta}, \theta \in]-\pi;\pi[\right\}.$$