

Feuille 2 : Fonctions arcsin, arccos, arctan

Exercice 1-1

1. Montrer que $0 < \arccos \frac{3}{4} < \frac{\pi}{4}$
2. Résoudre $\arccos x = 2 \arccos \frac{3}{4}$

Exercice 1-2 Calculer $\arcsin(\sin a)$, $\arccos(\cos a)$, $\arctan(\tan a)$, $\arccos(\sin a)$ pour $a \in \left\{ \frac{61\pi}{5}, \frac{76\pi}{5}, \frac{83\pi}{5} \right\}$.

Exercice 1-3 Que vaut $\arccos(\cos x)$ si $x \in [6\pi, 7\pi]$ puis si $x \in [25\pi, 26\pi]$?

Exercice 1-4 Votre calculatrice affirme que l'argument de $z = -3 + 4i$ est $-\arctan \frac{4}{3} + \pi$ ou $\arctan \frac{3}{4} + \frac{\pi}{2}$. Ces deux valeurs sont-elles cohérentes ?

Exercice 1-5 L'application $\cos : [2\pi, 3\pi] \rightarrow [-1, 1]$ est-elle bijective ? Si oui, donner une expression de sa fonction réciproque.

Exercice 1-6 On étudie la fonction f définie pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \cos^3 x + \sin^3 x$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $f(x + \pi)$. Quelle conclusion sur le graphe de f peut-on en tirer ?
2. Etudier le signe de $\sin x - \cos x$ pour $x \in [0, \pi]$. On pourra raisonner géométriquement (sur les courbes des fonctions ou le cercle unité) ou chercher A et ϕ tels que $\sin x - \cos x = A \sin(t + \phi)$.
3. Terminer l'étude de f .

Exercice 1-7 Représenter graphiquement sans l'aide de la calculatrice la fonction $x \mapsto \arcsin(\sin x)$.

Exercice 1-8 Simplifier les expressions $\tan(\arcsin x)$, $\cos(\arctan x)$ après avoir donné leur ensemble de définition.

Exercice 1-9 On pose $f : x \mapsto \arcsin \left(\frac{x+1}{x-1} \right)$.

1. Montrer que l'ensemble de définition de f est \mathbb{R}^- .
2. Déterminer le ou les points de la courbe d'ordonnée nulle et préciser la tangente en ce ou ces points.
3. Etudier la fonction.

Exercice 1-10 Simplifier les expressions $\arccos x + \arcsin x$ et $\arccos x + \arccos(-x)$ après avoir donné leur ensemble de définition. On pourra dériver.

Exercice 1-11 Dans ce qui suit, on dit que f est équivalent à g en 0 si $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Trouver une fonction g de la forme $g(x) = ax + b$ telle que f soit équivalent à g en 0 dans chaque cas suivant : $f(x) = \arctan x$, $f(x) = \arcsin(x)$, $f(x) = \arccos(x)$.

Exercice 1-12 Soit x, y des réels tels que $xy \neq 1$. Simplifier $\arctan \frac{x+y}{1-xy} - \arctan x - \arctan y$. On pourra dériver.

Exercice 1-13 Soit f la fonction définie sur $[\pi/2, \pi[$ par $f(x) = \frac{1}{\sin x}$. Montrer que f réalise une bijection de $[\pi/2, \pi[$ sur un ensemble à préciser. Déterminer f^{-1} à l'aide de la fonction arcsin.

Exercice 1-14 On cherche à résoudre l'équation (E) : $\arctan 2x + \arctan x = \frac{\pi}{4}$.

1. Démontrer que $f : x \mapsto \arctan 2x + \arctan x$ réalise une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle à préciser. En déduire que l'équation (E) admet une unique solution α .
2. Déterminer α en utilisant la formule d'addition de la tangente.

Exercice 1-15 Résoudre sur \mathbb{R} les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \arcsin \frac{1}{1+x^2} + \arccos \frac{3}{5} &= \frac{\pi}{2}, & \arccos \cos x &= \arccos \frac{1}{4} + \arccos \frac{1}{3} \\ \arccos x &= 2 \arccos(-1), & \arccos x &= \arcsin 2x \\ \arcsin x + \arcsin \sqrt{1-x^2} &= \frac{\pi}{2}, & 2 \arcsin x &= \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) \end{aligned}$$

Exercice 1-16 Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \arccos(1 - 2x^2)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et préciser en quels points f est continue.
2. Dériver f en prenant soin d'étudier l'ensemble où f est dérivable.
3. Dresser le tableau de variations de f et tracer son graphe.
4. Sur chaque ensemble où f est dérivable, donner une expression plus simple de f .

Exercice 1-17 Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \arccos(1 - 2\cos^4(x))$$

1. Montrer que f est définie et continue sur \mathbb{R} .
2. Montrer que f est 2π périodique. Quelle est la parité de f ? En déduire un intervalle d'étude I .
3. Partout où cela ne pose pas de problème, calculer la dérivée de f . On l'exprimera sous la forme la plus simple possible.
4. Sur chaque ensemble où f est dérivable, donner une expression plus simple de f .
5. Sur quel sous-ensemble de I la fonction f est-elle dérivable? Préciser la valeur des limites de $f'(x)$ à droite au point d'abscisse 0 et à gauche au point d'abscisse π .
6. Dresser le tableau de variations de f .
7. Tracer son graphe sur trois périodes.