Correction Feuille 5 : Applications linéaires

Exercice 1
1. La fonction $f(x,y) = (0,2y)$ est linéaire.
Soient (x_1,y_1) et (x_2,y_2) dans $\mathbb{R}^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f(\lambda(x_1,y_1)+(x_2,y_2)) &= f(\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2) \\ &= (0, 2(\lambda y_1 + y_2)) \\ &= (0, \lambda(2y_1) + 2y_2) \\ &= (0, \lambda(2y_1)) + (0, 2y_2) \\ &= \lambda(0, 2y_1) + (0, 2y_2) \\ &= \lambda f(x_1,y_1) + f(x_2,y_2) \end{aligned}$$

2. La fonction $f(x,y) = (x+3, y)$ n'est pas linéaire car

$$f(x_1+x_2, y_1+y_2) = (x_1+x_2+3, y_1+y_2) \neq ((x_1+3)+(x_2+3), y_1+y_2) = f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2)$$

3. La fonction $f(x) = 1/x$ n'est pas linéaire car

$$\frac{1}{x+y} \neq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

(et n'est même pas définie sur un espace vectoriel)
4. La fonction $f(x,y) = (y^2, x-y)$ n'est pas linéaire car (la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas linéaire) :

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda^2 y^2, \lambda(x-y)) \neq \lambda(y^2, x-y) = \lambda f(x,y)$$

5. La fonction $f(x,y,z) = (x+z, y+z)$ est linéaire.
Soient (x_1,y_1,z_1) et (x_2,y_2,z_2) dans $\mathbb{R}^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f(\lambda(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)) &= f(\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2) \\ &= ((\lambda x_1 + x_2) + \lambda(z_1+z_2), (\lambda y_1 + y_2) + \lambda(z_1 + z_2)) \\ &= (\lambda(x_1+z_1) + x_2 + z_2, \lambda(y_1+z_1) + y_2 + z_2) \\ &= \lambda(x_1+z_1, y_1+z_1) + (x_2+z_2, y_2, z_2) \\ &= \lambda f(x_1,y_1,z_1) + f(x_2,y_2,z_2) \end{aligned}$$

Exercice 2
Soient $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ des applications linéaires.

— Montrons que $f+g$ est linéaire :
soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} (f+g)(\lambda x + y) &= f(\lambda x + y) + g(\lambda x + y) \\ &= \lambda f(x) + f(y) + \lambda g(x) + g(y) \ \text{ car } f \text{ et } g \text{ lin.} \\ &= \lambda (f+g)(x) + (f+g)(y) \end{aligned}$$

— Montrons que $f \times g$ n'est pas linéaire :
deux possibilités, soit on dit que

$$f(\lambda x) \times g(\lambda x) = \lambda^2 f(x) \times g(x) \neq \lambda f(x) \times g(x) \text{ (faux pour tout } \lambda\,!)$$

soit on di que

$$f(x+y) \times g(x+y) = (f(x)+f(y)) \times (g(x)+g(y)) \neq f(x) \times g(x) + f(y) \times g(y).$$

Exercice 3. La Trace matricielle
1. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors $Tr(A) = 0$, $Tr(B) = 2$ et $Tr(A + B) = 2$.
2. Soient $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ des matrices carrés réelles. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que l'application trace est linéaire :

$$Tr(\lambda A + B) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda a_{i,i} + b_{i,i}) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} = \lambda Tr(A) + Tr(B).$$

Exercice 4.
1. Soient $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ dans $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on a

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda u + v) & = & f(\lambda x + x', \lambda y + y') \\ & = & \alpha(\lambda x + x', \lambda y + y') \\ & = & \alpha(\lambda x, \lambda y) + \alpha(x' + y') \\ & = & \alpha\lambda(x, y) + \alpha(x', y') \\ & = & \lambda f(u) + f(v) \end{array}$$

d'où f est linéaire.
2. Le vecteur (x, y) est dans le noyau de f si

$$f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \alpha(x, y) = (0, 0).$$

Comme α est non-nul, cela implique que $(x, y) = (0, 0)$. D'où $\ker f = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.
3. -représentation graphique de u et $f(u)$-, d'où $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^2$.

Exercice 5.
1. -dessin-
2. -dessin-
3. On en déduit que R_θ est une application linéaire.

Exercice 6.
1. On suppose que $f^2 = f$. On a

$$\begin{array}{rcl} (\mathrm{Id} - f)^2 & = & (\mathrm{Id} - f) \circ (\mathrm{Id} - f) \\ & = & \mathrm{Id} \circ (\mathrm{Id} - f) - f(\mathrm{Id} - f) \\ & = & \mathrm{Id} - f - f - f \circ (-f) \end{array}$$

Comme f est linéaire et comme $f^2 = f$, on a

$$\begin{array}{rcl} (\mathrm{Id} - f)^2 & = & \mathrm{Id} - f - f + f \circ (f) \\ & = & \mathrm{Id} - f - f + f \\ & = & \mathrm{Id} - f \end{array}$$

d'où $\mathrm{Id} - f$ est un projecteur (bien sûr c'est une application linéaire, cf exo 2).
2. -par double inclusion-
Soit $x \in \ker(\mathrm{Id} - f)$, donc $x - f(x) = 0$, ie $f(x) = x$, et donc $x \in \mathrm{Im}(f)$.
Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$, donc il existe x tel que $y = f(x)$. En appliquant f à cette équation, on obtient

$$f(y) = f(f(x)) \Rightarrow f(y) = f(x) = y$$

car f est un projecteur. D'où $y \in \ker(\mathrm{Id} - f)$.
On en déduit l'égalité des ensembles voulue.
3. Soit x dans $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$. D'après la question précédente, cela revient à dire que x est dans $\ker f$ et dans $\ker(\mathrm{Id} - f)$. On a donc

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = 0 \\ x - f(x) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f(x) = x \end{array} \right. \Rightarrow x = 0$$

Les deux espaces sont donc supplémentaires.
4.

(i) Montrons que p est un projecteur :
soit (x, y) dans $\mathbb{R}^2$, on a $p(x, y) = (x, x)$, et

$$p^2(x, y) = p(x, x) = (x, x) = p(x, y)$$

d'où p est un projecteur.

(ii) projection -non orthogonale- sur la diagonale

(iii) projection -non orthogonale- sur O_y

Exercice 7. exo 3 Pascal Lainé / Le coin des exercies / site Licence de mathématiques
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (-2x + y + z, x - 2y + z)$.
1. Montrons que f est linéaire :
soient $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda(x, y, z) + (x', y', z')) & = & f(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') \\ & = & (-2(\lambda x + x') + (\lambda y + y') + (\lambda z + z'), (\lambda x + x') - 2(\lambda y + y') + (\lambda z + z')) \\ & = & (\lambda(-2x + y + z) + (-2x' + y' + z'), \lambda(x - 2y + z) + (x' - 2y' + z')) \\ & = & \lambda(-2x + y + z, x - 2y + z) + (-2x' + y' + z', x' - 2y' + z') \\ & = & \lambda f(x, y, z) + f(x', y', z') \end{array}$$

donc f est linéaire.
2. Soit $(x, y, z) \in \ker(f)$, on a donc

$$\begin{array}{rcl} f(x, y, z) = 0 & \Leftrightarrow & (-2x + y + z, x - 2y + z) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{c} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \begin{array}{c} L_1 \\ 2L_2 + L_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{c} -2x + y + z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -2x + 2y = 0 \\ y = z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = z \\ y = z \end{array} \right. \end{array}$$

donc $\ker(f) = Vect((1, 1, 1))$. D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im} f) = \dim(\mathbb{R}^3) \Rightarrow 1 + \dim(\mathrm{Im} f) = 3$$

On obtient que $\dim(\mathrm{Im} f) = 2$.
3. Comme $\mathrm{Im} f \subset \mathbb{R}^2$ et $\dim(\mathrm{Im} f) = 2$, on a $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^2$. Une base possible de $\mathrm{Im} f$ est $\{(1, 0), (0, 1)\}$.

Exercice 8. exo 21 PL / Le coin des exercices / site Licence de mathématiques
Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application définie par $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
1. L'image des vecteurs de la base canonique par f vaut :

$$f(1, 0, 0, 0) = f(0, 1, 0, 0) = f(0, 0, 1, 0) = f(0, 0, 0, 1) = 1.$$

Donc $\mathrm{Im} f = Vect(1)$ et $\dim(\mathrm{Im} f) = 1$.
2. D'après le théorème du rang, on a :

$$\dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im} f) = \dim(\mathbb{R}^4) \Rightarrow \dim(\ker f) = 3.$$

Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \ker f$, on a donc

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

On doit exprimer x en fonction de trois vecteurs indépendants :

$$x = (-x_2 - x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4) \Leftrightarrow x = x_2(-1,1,0,0) + x_3(-1,0,1,0) + x_4(-1,0,0,1)$$

Le noyau de f est donc engendré par $(-1,1,0,0)$, $(-1,0,1,0)$ et $(-1,0,0,1)$.

Exerice 9.
1. Soient f, g des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors pour tout x on a

$$\begin{aligned}
\Phi(\lambda f + g)(x) &= \int_0^x (\lambda f + g)(t)dt \\
&= \int_0^x \lambda f(t) + g(t)dt \\
&= \lambda \int_0^x f(t)dt + \int_0^x g(t)dt \\
&= \lambda\Phi(f)(x) + \Phi(g)(x)
\end{aligned}$$

d'où $\Phi(\lambda f + g) = \lambda\Phi(f) + \Phi(g)$. La fonction Φ est donc linéaire.
2. La fonction f est dans le noyau si pour tout x on a $\Phi(f)(x) = 0$. Donc l'aire de la courbe entre 0 et x est nulle pour tout x, donc f est la fonction nulle. (On peut regarder la dérivée de $\Phi(f)$, qui est la fonction nulle, donc $\Phi(f)$ est constante, or elle vaut 0 en $x = 0$, donc f est la fonction constante égale à 0.)
3. L'image est l'ensemble des fonctions dérivables qui s'annulent en $x = 0$.

Exercice 10.
1. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ des suites. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
f(\lambda(u_n)_n + (v_n)_n) &= f((\lambda u_n + v_n)_n) \\
&= \Big((\lambda u_{n+2} + v_{n+2}) - (\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) - 2(\lambda u_n + v_n)\Big)_n \\
&= \Big(\lambda(u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n) + (v_{n+2} - v_{n+1} - 2v_n)\Big)_n \\
&= \lambda f((u_n)_n) + f((v_n)_n)
\end{aligned}$$

d'où f est linéaire.
2. Pour être dans le noyau, $(u_n)_n$ doit vérifier la relation

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

Exercice 11.
1. Soient y_1 et y_2 deux fonctions C^1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
f(\lambda y_1 + y_2) &= (\lambda y_1 + y_2)' + (\lambda y_1 + y_2) \\
&= \lambda(y_1' + y_1) + (y_2' + y_2) \\
&= \lambda f(y_1) + f(y_2)
\end{aligned}$$

d'où f est linéaire.
2. Les fonctions dans le noyau sont de la forme

$$y(t) = K\exp(-t)$$

où $K \in \mathbb{R}$.
3. On en déduit que $\ker(f) = Vect(t \mapsto \exp(-t))$.

Exercice 12. exo 7 PL / Le coin des exercices / site Licence de mathématiques
Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(u) = (6x - 4y - 4z, 5x - 3y - 4z, x - y).$$

1. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$u \in \ker f \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 6x - 4y - 4z = 0 \\ 5x - 3y - 4z = 0 \\ x - y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 6x - 4x - 4z = 0 \\ 5x - 3x - 4z = 0 \\ x = y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} z = \dfrac{1}{2}x \\ y = x \end{array} \right.$$

On en déduit que $u \in \ker f$ si et seulement si u est de la forme $x(1, 1, 1/2)$. D'où $\ker f = Vect(1, 1, 1/2)$ (ou aussi $= Vect(2, 2, 1)$).
2. Soit $b = e_1 + e_2$ et $c = e_2 - e_3$.
a. On a $b = (1, 1, 0)$ et $c = (0, 1, -1)$.

$$f(b) = (6 - 4 - 0, 5 - 3 - 0, 1 - 1) = (2, 2, 0) = 2b$$
$$f(c) = (0 - 4 + 4, 0 - 3 + 4, 0 - 1) = (0, 1, -1) = c$$

b. On a $f(b) = 2b$ et $f(c) = c$ qui sont dans $\mathrm{Im} f$. De plus, ces deux vecteurs sont linéairement indépendant, donc $\{b, c\}$ forme une famille libre de $\mathrm{Im} f$. D'après le théorème du rang, on

$$\dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im} f) = \dim(\mathbb{R}^3)$$

donc $\dim(\mathrm{Im} f) = 2$. Une famille libre à deux éléments dans un espace vectoriel de dimension 2 est une base.
Autre méthode : travailler avec $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ qui engendre $\mathrm{Im} f$ (...).
3. Déterminer une ou plusieurs équations caractérisant $\mathrm{Im}(f)$:
Soit $u = (x, y, z) \in Imf$, le but est d'avoir des relations entre x, y, z. Par la question précédente, on sait qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$(x, y, z) = \alpha f(b) + \beta f(c) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 2\alpha \\ y = 2\alpha + \beta \\ z = -\beta \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 2\alpha \\ z = -\beta \\ y = x - z \end{array} \right.$$

Tout vecteur de $\mathrm{Im} f$ vérifie donc l'équation $x - y - z = 0$. **4.** Le vecteur a générateur de $\ker f$ n'est pas dans $\mathrm{Im} f$ (car ne vérifie pas l'équation précédente), donc la famille de trois vecteurs $\{a, b, c\}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$, et donc une base. En particulier, on a $\ker f \oplus \mathrm{Im} f = \mathbb{R}^3$.

Exercice 13. exo 8 PL
Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base cacnonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$u(e_1) = f_1 - f_2 + 2f_3;\ u(e_2) = 2f_1 + f_2 - 3f_3;\ u(e_3) = 3f_1 - f_3;\ u(e_4) = -f_1 - 2f_2 + 5f_3.$$

1. L'image par u du vecteur $x = (x_1, x_2, x_{,3}\, x_{,4}\,)$ est :

$$u(x) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4)f_1 + (-x_1 + x_2 - 2x_4)f_2 + (2x_1 - 3x_2 - x_3 + 5x_4)f_3$$

2. Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \ker f$, alors

$$\left\{ \begin{array}{cl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 & = 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_4 & = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 5x_4 & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 & = 0 \\ 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 & = 0 \\ -7x_2 - 7x_3 + 7x_4 & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 & = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 & = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cl} x_1 & = -x_3 - x_4 \\ x_2 & = -x_3 + x_4 \end{array} \right.$$

Donc $x=(-x_3-x_4,-x_3+x_4,x_3,x_4)=x_3(-1,-1,1,0)+x_4(-1,1,0,1)$. Les vecteurs $(-1,-1,1,0)$ et $(-1,1,0,1)$ forment une famille génératrice de $\ker f$, de plus ils sont linéairement indépendants, ils forment donc une base de $\ker f$. On a donc $\dim(\ker f)=2$.
3. Par le théorème du rang, on sait que $\dim(\ker u)=2$. Les vecteurs $u(e_1),u(e_2)$ sont l.i., donc forment une base de $\mathrm{Im} u$.

Exercice 14. exo 59 PL décomposé
Soit $u:\mathbb{R}_2[X]\to\mathbb{R}_2[X]$ défini par $u(P)=P+(1-X)P'$.
Soit $\mathcal{B}=(1,X,X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
1. Montrons que u est une application linéaire. Soient $P,Q\in\mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}u(\lambda P+Q) &= (\lambda P+Q)+(1-X)(\lambda P+Q)' \\ &= \lambda(P+(1-X)P')+(Q+(1-X)Q') \\ &= \lambda u(P)+u(Q)\end{aligned}$$

De plus $deg(P)\leq 2$, $deg(P')\leq 1$ donc $deg(u(P))\leq 2$. D'où $\mathrm{Im}(f)\subset\mathbb{R}_2[X]$.

2. Soit $P=aX^2+bX+c\in\ker(u)$, alors

$$\begin{aligned}P+(1-X)P'=0 &\Leftrightarrow (aX^2+bX+c)+(1-X)(2aX+b)=0 \\ &\Leftrightarrow aX^2+bX+c+2aX+b-2aX^2-bX=0 \\ &\Leftrightarrow -aX^2+2aX+b+c=0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases}-a=0\\ 2a=0\\ b+c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=0\\ b=-c\end{cases}\end{aligned}$$

P est dans $\ker u$ s'il est de la forme $P=bX-b=b(X-1)$. Le noyau $\ker u$ est donc engendré par $X-1$.
3. On a $\dim(\ker(u))=1$ et par le théorème du rang $\dim(\mathrm{Im}(u))$=2.
4. L'image de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ par u est

$$u(1)=1,\ \ u(X)=1,\ \ u(X^2)=2X-X^2$$

Les polynômes 1 et $2X-X^2$ ne sont pas proportionnelles donc forment une base de $\mathrm{Im}(u)$.

Exercice 15.
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie p. Soit f une application linéaire de E dans E.
1. Soit $x\in\ker f^k$. On peut donc écrire $f^k(x)=0$. En particulier

$$f^{k+1}(x)=f(f^k(x))=f(0)=0,$$

la dernière égalité est vraie car f est linéaire. On a donc $x\in\ker f^{k+1}$, ce qui prouve $\ker f^k\subset\ker f^{k+1}$.
2. On a $\dim(\ker f^k)\leq\dim(\ker f^{k+1})$.
3. Soit $y\in\mathrm{Im} f^{k+1}$. Donc il existe x tel que

$$y=f^{k+1}(x)=f^k(f(x))$$

donc y est l'image par f^k de $f(x)$. D'où $y\in\mathrm{Im} f^k$, ce qui prouve $\mathrm{Im} f^{k+1}\subset\mathrm{Im} f^k$.
4. On a $\dim(\mathrm{Im} f^{k+1})\leq\dim(\mathrm{Im} f^k)$.
Question hors-TD. La suite $(\dim(\ker f^k))_k$ est croissante et majorée par $\dim(E)=p$, donc elle converge. Comme c'est une suite *à valeurs entières* et qui converge, elle est constante à partir d'un certain rang k_0. (Idem pour $(\dim(\mathrm{Im}\, f^k))_k$)

Exercice 16. - Question de cours exo 24 de PL
Soit $u : E \to E$ une application linéaire. Montrer que [u est injective] $\Leftrightarrow$ [$\ker u = \{0_E\}$].
Commençons par montrer que si u est injective, alors $\ker(u) = \{0_E\}$. Pour $\lambda = 0$, on a

$$u(\lambda x) = \lambda u(x) = 0.u(x) = 0$$

donc le vecteur 0_E est dans $\ker\{u\}$. Comme u est injective, on ne peut pas avoir d'autres valeurs dont l'image est zéro. D'où $\ker(u) = \{0_E\}$.
Montrons maintenant que $\ker(u) = \{0_E\}$ implique u injective. Soient $x, x' \in E$ tels que

$$\begin{aligned} u(x) = u(x') &\Leftrightarrow u(x - x') = 0 \text{ (par linéarité)} \\ &\Leftrightarrow x - x' = 0 \text{ (par hypothèse)} \\ &\Leftrightarrow x = x' \end{aligned}$$

donc u est injective.

Exercice 17. exo 7 ancienne feuille
Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.
1. Montrons que si $v_1, v_2, ..., v_p$ engendrent $\mathbb{R}^n$ alors $f(v_1), f(v_2), ...f(v_p)$ engendrent $\mathrm{Im}(f)$:
Soit $y \in \mathrm{Im}f$, alors il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f(x)$. Comme les vecteurs $v_1, ..., v_p$ engendrent $\mathbb{R}^n$, il existe $a_1, ..., a_p$ des réels tels que

$$x = a_1v_1 + ... + a_pv_p = \sum_{i=1}^{p} a_iv_i$$

On a donc

$$y = f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{p} a_iv_i\right) = \sum_{i=1}^{p} a_if(v_i)$$

la dernière égalité étant vraie par linéarité de la fonction f. Tout vecteur de l'image de f peut donc s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $f(v_1), ..., f(v_p)$. Donc les vecteurs $f(v_1), ..., f(v_p)$ engendrent $\mathrm{Im}f$.
2. Montrons que si $f(v_1), f(v_2), ..., f(v_p)$ forment un système libre alors $v_1, v_2, ..., v_p$ est libre aussi. Pour cela, faisons un raisonnement par l'absurde :
On suppose qu'il existe des réels $a_1, ..., a_p$ *non nuls* tels que

$$\sum_{i=1}^{p} a_iv_i = 0$$

Par linéarité de f on a donc

$$\left[f(\sum_{i=1}^{p} a_iv_i) = \sum_{i=1}^{p} a_if(v_i) \quad \text{et} \quad f(0) = 0\right] \Rightarrow \sum_{i=1}^{p} a_if(v_i) = 0$$

or par hypothèse, les vecteurs $f(v_1), ..., f(v_p)$ sont libres, contradiction ! D'où les vecteurs $v_1, ..., v_p$ sont libres.
3. Montrons que si f est injective et si $v_1, ..., v_p$ est un système libre alors $f(v_1), ..., f(v_p)$ est libre aussi. Pour cela, faisons un raisonnement par l'absurde :
On suppose qu'il existe des réels $a_1, ..., a_p$ *non nuls* tels que

$$\sum_{i=1}^{p} a_if(v_i) = 0$$

Par linéarité de f on a

$$f\left(\sum_{i=1}^{p} a_i v_i\right) = 0$$

et par injectivité de f (cf exo 10, question de cours)

$$\sum_{i=1}^{p} a_i v_i = 0$$

Or on a supposé les vecteurs $v_1, ..., v_p$ libres, contradiction ! Donc les vecteurs $f(v_1), ..., f(v_p)$ sont libres.

Exercice 18. exo 25 PL
Soit $u : E \to E$ une application linéaire et λ un réel. Soit $E_\lambda = \ker(u - \lambda id_E)$.
1. Soit $x \in E_\lambda$, on peut donc écrire

$$(u - \lambda id_E)(x) = 0 \Leftrightarrow u(x) - \lambda x = 0 \Leftrightarrow u(x) = \lambda x.$$

Montrons que E_λ est un sous-espace vectoriel de E :
Soient $x, y \in E_\lambda$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} u(\alpha x + y) &= \alpha u(x) + u(y) \text{ (par linéarité de } u) \\ &= \alpha \lambda x + \lambda y \text{ (par hypothèse sur } x \text{ et } y) \\ &= \lambda(\alpha x + y) \end{aligned}$$

donc $u(\alpha x + y) - \lambda(\alpha x + y) = 0$, d'où $\alpha x + y$ est dans E_λ. L'espace E_λ est donc un espace vectoriel, inclut dans E par définition de u.
2. Soient $y_1, y_2 \in u(F)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Soient $x_1, x_2 \in F$ tels que $u(x_1) = y_1$ et $u(x_2) = y_2$. On a

$$\begin{aligned} \alpha y_1 + y_2 &= \alpha u(x_1) + u(x_2) \\ &= u(\alpha x_1 + x_2) \text{ par linéarité de } u \end{aligned}$$

Comme F est un espace vectoriel, $\alpha x_1 + x_2 \in F$, d'où $\alpha y_1 + y_2 \in u(F)$. On en déduit que F est un espace vectoriel, inclut dans E par définition de u.
3. Si $\lambda \neq 0$. On montre que $u(E_\lambda) = E_\lambda$ par double inclusion :
Soit $x \in E_\lambda$, d'après la question 1, on a

$$\begin{aligned} u(x) = \lambda x &\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} u(x) = x \text{ car } \lambda \neq 0 \\ &\Leftrightarrow u\left(\frac{1}{\lambda} x\right) = x \text{ par linéarité de } u \end{aligned}$$

Comme E_λ est un sous-espace vectoriel qui contient x, il contient aussi $(1/\lambda)x$. Donc $x \in u(E_\lambda)$. On a donc la première inclusion $E_\lambda \subset u(E_\lambda)$.
Soit $y \in u(E_\lambda)$, alors il existe $x \in E_\lambda$ tel que $u(x) = y$. Or comme, d'après la question 1, $u(x) = \lambda x$, d'où $y = \lambda x$. Comme E_λ est un sous-espace vectoriel qui contient x, on en déduit que $\lambda x = y \in E_\lambda$, d'où $u(E_\lambda) \subset E_\lambda$.
On en conclut que $u(E_\lambda) = E_\lambda$.

Exercice 19.
Soient E, F, G des espaces $\mathbb{R}$-vectoriels, avec f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G.
1. Montrer que $[\mathrm{Im} f \subset \ker g] \Leftrightarrow [g \circ f(x) = 0 \ \forall x \in E]$.

Etape $\Rightarrow$.
Soit $x \in E$. On a

$$g \circ f(x) = g\Big(f(x)\Big) = 0$$

car $\mathrm{Im} f \subset \ker g$. D'où pour tout $x \in E$, $g \circ f(x) = 0$.
Etape $\Leftarrow$.
Soit $y \in \mathrm{Im} f$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Or

$$g \circ f(x) = 0 \Rightarrow g(y) = 0$$

d'où $y \in \ker g$. On en déduit l'inclusion $\mathrm{Im} f \subset \ker g$.

Exercice 20. exo 23 PL
Soit $u : E \to E$ une application linéaire, E étant un espace vectoriel de dimension n pair. Montrons que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(a) $u^2(x) = 0$ pour tout $x \in E$ et $n = 2\dim(\mathrm{Im}(u))$.

(b) $\mathrm{Im}(u) = \ker(u)$.

Etape (a) $\Rightarrow$ (b).
On commence par montrer une inclusion : soit $y \in \mathrm{Im}(u)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Comme on suppose (a), on sait que

$$u^2(x) = 0 \Rightarrow u(y) = 0$$

d'où $y \in \ker(u)$. On en déduit que $\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u)$.
On conclut par égalité de la dimension de espaces : par le théorème du rang, on a

$$\dim(\mathrm{Im} u) + \dim(\ker u) = \dim(E) \Rightarrow \frac{n}{2} + \dim(\ker u) = n \Rightarrow \dim(\ker u) = \frac{n}{2}$$

Comme $\dim(\mathrm{Im} u) = \dim(\ker u)$ et qu'on a une inclusion, les espaces sont égaux.
Etape (b) $\Rightarrow$ (a).
Par le théorème du rang, on a

$$\dim(\mathrm{Im} u) + \dim(\ker u) = \dim(E) \Rightarrow 2\dim(\mathrm{Im} u) = n$$

Montrons maintenant la première partie de (a). Soit $x \in E$, alors $u(x) \in \mathrm{Im} u = \ker u$ d'après (b), d'où

$$u\Big(u(x)\Big) = 0 \Leftrightarrow u^2(x) = 0.$$

L'équation est vraie pour tout $x \in E$.