Université Claude Bernard Lyon 1 PCSI L2 UE Math4
Année universitaire 2018/2019
Printemps 2019

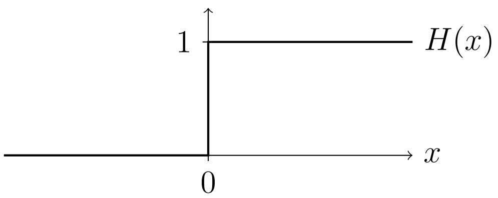
Corrigé du CC2 du 22.03.2019

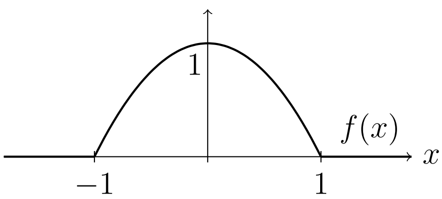
Exercice 1 (6 pts.)**.** Soient $f, H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les deux fonctions définies par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x^2 > 1 \\ 1 - x^2 & \text{si } x^2 \le 1 \end{cases} \qquad H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

Tracer le graphe de f et le graphe de H. Déterminer $f \star H(x)$. Tracer le graphe de $f \star H$.

Corrigé. Commençons par tracer les graphes de f et H :





Soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition,

$$f \star H(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) H(x-y)dy, \quad \text{et } H(x-y) = \begin{cases} 0 & \text{lorsque } x - y < 0, \\ 1 & \text{lorsque } x - y \ge 0, \end{cases}$$

donc l'intégrale se simplifie en

$$f \star H(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy.$$

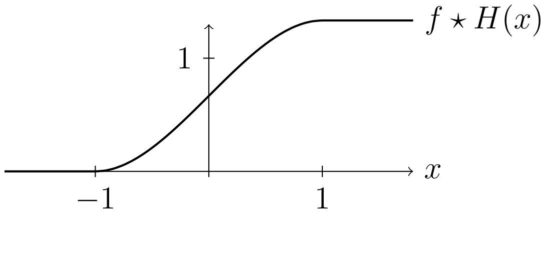
On distingue alors trois cas :
— si $x < -1$, $f \star H(x) = 0$;
— si $-1 \le x \le 1$,

$$f \star H(x) = \int_{-1}^{x} (1-y^2)dy = \left[y - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^{x} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3},$$

— si $x > 1$, alors

$$f \star H(x) = \int_{-1}^{1} (1-y^2)dy = \frac{4}{3}.$$

On peut maintenant tracer le graphe de $f \star H$:



Exercice 2 (3 pts.). Soient $f(x) = x$ et $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. On rappelle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 1$. Déterminer $f \star g$.

Bonus [2 pts.] Soit $g(x)$ une fonction continue paire qui satisfait $g(x) = 0$ dès que $|x| \geq b$ pour une valeur réelle b et $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 1$. Montrer que $f \star g = f$, où f est toujours la fonction définie par $f(x) = x$.

Corrigé. Calculons $f \star g$ directement. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (x-y)e^{-y^2/2}dy.$$

Or, $\int_{\mathbb{R}} xg(y)dy = x \int_R g(y)dy = x$, il reste donc à calculer l'autre intégrale :

$$\int_R ye^{-y^2/2}dy = \left[-\frac{1}{2}e^{-y^2/2}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0,$$

et donc finalement, $f \star g(x) = x$, c'est-à-dire que $f \star g = f$.

Corrigé du bonus : Le calcul est similaire au précédent. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy = \int_{-b}^{b} (x-y)g(y)dy.$$

Comme g est continue sur $[-b, b]$, il n'y a pas de problème d'intégrabilité. Alors on peut écrire :

$$f \star g(x) = x\int_{-b}^{b} g(y)dy - \int_{-b}^{b} yg(y)dy = x - \int_{-b}^{b} yg(y)dy$$

car $\int_{\mathbb{R}} g(y)dy = 1$. Comme, de plus, g est paire, la fonction $y \mapsto yg(y)$ est impaire, et donc, en faisant le changement de variable donné par $z = -y$,

$$\begin{aligned}
\int_{-b}^{b} yg(y)dy &= \int_{0}^{b} yg(y)dy + \int_{-b}^{0} yg(y)dy \\
&= \int_{0}^{b} yg(y)dy + \int_{b}^{0} zg(z)dz \\
&= 0,
\end{aligned}$$

d'où finalement, $f \star g = f$.

Exercice 3 (3 pts.). Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 1 \\ 1 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

Calculer la transformation de Laplace $\mathcal{L}[f]$ de f.

Corrigé. Comme la fonction f est nulle en dehors de $[0, 1]$, sa transformée de Laplace est définie pour tout $s \in \mathbb{R}$, et est égale à

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-sx}dx = \int_0^1 (1-x^2)e^{-sx}dx.$$

On peut calculer sa valeur directement. D'abord, en $s = 0$,

$$\mathcal{L}[f](0) = \int_0^1 (1-x^2)dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Si $s \neq 0$, alors, par intégrations par parties,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f](s) &= \int_0^1 e^{-sx}dx - \int_0^1 x^2 e^{-sx}dx \\
&= \left[-\frac{1}{s}e^{-sx}\right]_0^1 - \left(\left[-\frac{x^2}{s}e^{-sx}\right]_0^1 + \frac{1}{s}\int_0^1 2xe^{-sx}dx\right) \\
&= \frac{1-e^{-s}}{s} + \frac{e^{-s}}{s} - \frac{2}{s}\left(\left[-\frac{x}{s}e^{-sx}\right]_0^1 + \frac{1}{s}\int_0^1 e^{-sx}dx\right) \\
&= \frac{1}{s} - \frac{2}{s}\left(-\frac{e^{-s}}{s} - \frac{1}{s^2}\left[e^{-sx}\right]_0^1\right) \\
&= \frac{1}{s} + \frac{2e^{-s}}{s^2} + \frac{2e^{-s}-2}{s^3}.
\end{aligned}$$

Exercice 4 (8 pts.)**.** On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}^+$ avec conditions initiales

$$f''(t) + 4f'(t) + 3f(t) = e^t \qquad f(0) = 0,\ f'(0) = 1.$$

À l'aide de la transformation de Laplace, trouver la solution de cette équation.

Corrigé. On souhaite appliquer la transformée de Laplace à l'équation différentielle. Dans ce but, notons que si f vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f'](s) &= s\mathcal{L}[f](s) - f(0) = s\mathcal{L}[f](s), \\
\mathcal{L}[f''](s) &= s\mathcal{L}[f'](s) - f'(0) = s^2\mathcal{L}[f](s) - 1.
\end{aligned}$$

De plus, $\mathcal{L}[t \mapsto e^t](s) = \frac{1}{1-s}$, et donc on cherche une solution à

$$s^2\mathcal{L}[f](s) - 1 + 4s\mathcal{L}[f](s) + 3\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{s-1},$$

ou encore, en regroupant les termes en $\mathcal{L}[f](s)$,

$$(s^2 + 4s + 3)\mathcal{L}[f](s) = 1 + \frac{1}{s-1} = \frac{s}{s-1}.$$

En remarquant que $s^2 + 4s + 3 = (s+3)(s+1)$, on obtient

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{s}{(s-1)(s+1)(s+3)}.$$

On peut maintenant réduire la fraction rationnelle du membre de droite en éléments simples. Pour cela, on peut appliquer la décomposition donnée dans le formulaire : il existe d'uniques constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$ telles que

$$\frac{s}{(s-1)(s+1)(s+3)} = \frac{a}{s-1} + \frac{b}{s+1} + \frac{c}{s+3}.$$

Pour trouver a, on multiplie l'équation précédente par $s-1$, puis un évalue l'expression en $s = 1$. Alors

$$a = \left.\frac{s}{(s+1)(s+3)}\right|_{s=1} = \frac{1}{8}.$$

De la même manière,

$$b = \left.\frac{s}{(s-1)(s+3)}\right|_{s=-1} = \frac{1}{4}, \quad c = \left.\frac{s}{(s-1)(s+1)}\right|_{s=-3} = -\frac{3}{8},$$

et on peut alors inverser la transformée de Laplace pour trouver que

$$f(t) = \frac{1}{8}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{3}{8}e^{-3t}.$$

Ce n'est pas nécessaire, mais on peut s'assurer que f est bien une solution du problème. Le calcul nous donne raison.