TD 4 Extra – Transformation de Laplace

Ce sujet est largement issu du sujet de l'épreuve du concours Centrale Maths 1, PSI, en 2012, qui est consultable sur le site de l'édition H&K.

A Préliminaires et définitions

On rappelle que $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$, continues et à valeur dans $\mathbb{R}$. On notera aussi cet ensemble simplement $\mathcal{C}^0$ lorsque il n'y a pas d'ambiguïté sur le domaine de définition et l'ensemble d'arrivée. De la même manière, C^1 désigne l'ensemble des fonctions dérivables et de dérivée continue.

Dans tout le problème, on considère une fonction λ, continue et de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, croissante et non majorée.

Définition. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On note

— E_f l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $t \mapsto f(t)e^{-x\lambda(t)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$,

— E'_f l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-x\lambda(t)}dt$ converge,

— et, pour $x \in E_f$,

$$Lf(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-x\lambda(t)}dt.$$

On se propose ci-après d'étudier la transformation $f \mapsto Lf$, d'en établir quelques propriétés, d'examiner certains exemples et d'utiliser la transformation L pour l'étude d'un opérateur

1. Quelle inclusion existe-t-il entre E_f et E'_f ?

2. On suppose dans cette question que E_f n'est pas vide.

2.1. Montrer que dans ce cas E_f est un intervalle non majoré de $\mathbb{R}$.

2.2. Montrer qu'alors, Lf est continue sur E_f.

2.3. Finalement, en supposant de plus que $\lambda(t) > 0$ pour tout $t > 0$, montrer que Lf est décroissante sur E_f, et que $\lim_{x\to+\infty} Lf(x) = 0$.

B Exemples dans le cas où f est positive

1. Comparer E_f et E'_f dans le cas où f est positive

2. Dans les trois cas suivants, déterminer E_f :

(i) $f = \lambda'$, où on suppose que λ est dérivable, et de dérivée continue.

(ii) $f : t \mapsto e^{t\lambda(t)}$.

(iii) $f : t \mapsto \dfrac{e^{-t\lambda(t)}}{1+t^2}$.

3. Dans cette question uniquement, on étudie le cas où, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\lambda(t) = t^2, \quad f(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

3.1. Déterminer E_f. Que vaut $Lf(0)$?

3.2. Soit $a > 0$. Montrer que Lf est dérivable sur $]a, +\infty[$. En déduire que Lf est dans $\mathcal{C}^1(]0, +\infty[, \mathbb{R})$, et expliciter sa dérivée.

3.3. Montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$Lf(x) - (Lf)'(x) = \frac{A}{\sqrt{x}}, \quad \text{où } A = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

3.4. Soit maintenant, pour $x \geqslant 0$, $g(x) = e^{-x} Lf(x)$. En dérivant g, montrer que

$$g(x) = \frac{\pi}{2} - A \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt.$$

3.5. En utilisant le résultat de la question 2.3, en conclure que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

C Étude en la borne inférieure de E_f

On suppose que f est positive et que E_f n'est ni vide ni égal à $\mathbb{R}$. On note α sa borne inférieure, c'est-à-dire que $E_f =]\alpha, +\infty[$ ou $E_f = [\alpha, +\infty[$.

1. On suppose dans cette question que Lf est bornée sur E_f : il existe $M > 0$ tel que $\forall\, x \in E_f$, $Lf(x) \leqslant M$. On va montrer qu'alors, $\alpha \in E_f$.

1.1. Soit $A > 0$. Montrer que la fonction

$$L_A f(x) = \int_0^A f(t) e^{-x\lambda(t)} dt$$

est bien définie sur $\mathbb{R}$ et y est continue.

1.2. Montrer que pour tout $x \in E_f$, $L_A f(x) \leqslant M$, et en déduire que $L_A f(\alpha) \leqslant M$.

1.3. Conclure.

2. On suppose maintenant que $\lambda(t) \geqslant 0$ pour tout $t > 0$, et que $\alpha \notin E_f$. Que peut-on dire sur $Lf(x)$ lorsque x tend vers α par valeurs supérieures ?

3. Peut-on arriver à la même conclusion en ne supposant pas que $\lambda \geqslant 0$?