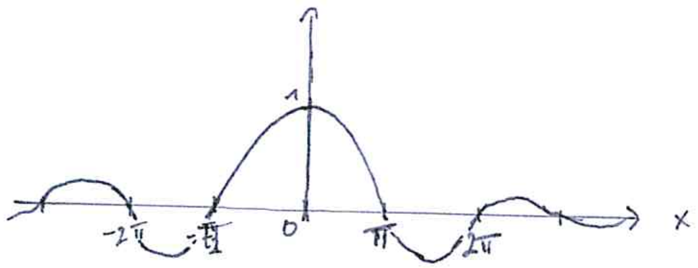
TD 5 -

Transformation de Fourier

Ex 1 :

sinc :



1. $$\widehat{\frac{1}{2a}\chi_{[-a;a]}}(p) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx}\,\frac{\chi_{[-a;a]}(x)}{2a}\,dx = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} e^{-ipx}\,dx = \begin{cases} 1 & \text{si } p=0 \\ \frac{1}{2a}\left[\frac{e^{-ipx}}{-ip}\right]_{-a}^{a} & \text{si } p\neq 0 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2iap}\left(e^{iap}-e^{-iap}\right) = \operatorname{sinc}(ap)$$

En particulier, $\widehat{\frac{1}{2}\chi_{[-1;1]}} = \operatorname{sinc}$

2. On est tenté d'appliquer la formule d'inversion :

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\chi_{[-1;1]}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sinc}(p)\,dp \quad , \text{ d'où } \int_{\mathbb{R}}\operatorname{sinc}(x)\,dx = \pi$$

Cependant, sinc n'est pas intégrable. On peut prouver le résultat rigoureusement de la manière suivante :

* $\int_{\mathbb{R}}\operatorname{sinc}(x)\,dx$ converge d'après TD 1, ex 4.

* On définit, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)x)}{x}\,dx \underset{\downarrow}{\overset{y=(2n+1)x}{=}} \int_{-n\pi-\frac{\pi}{2}}^{n\pi+\frac{\pi}{2}} \operatorname{sinc}(y)\,dy \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{\mathbb{R}}\operatorname{sinc}(y)\,dy$$

$$V_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)}\,dx$$

* Montrons que $V_n = \pi$. Soit $x \neq 0$, alors

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{i2kx} = e^{-inx}\left(\frac{e^{i2(2n+1)x}-1}{e^{i2x}-1}\right)$$

$$= e^{-inx}\,\frac{e^{i(2n+1)x}}{e^{ix}}\,\frac{e^{i(2n+1)x}-e^{-i(2n+1)x}}{e^{ix}-e^{-ix}}$$

$$= \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)}$$

Ainsi, $V_n = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)}\,dx = \sum_{k=-n}^{n}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{i2kx}\,dx$

or, si $k \neq 0$, $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{i2kx}dx = \left[\frac{1}{2ik}e^{i2kx}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{k}\sin(k\pi) = 0$

donc $V_n = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{0}\,dx = \pi$.

* Montrons finalement que $|U_n - V_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$$U_n - V_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)x)\underbrace{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}\right)}_{g(x)}dx$$

$g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, donc g est continue sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Si $x \neq 0$, $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{\cos(x)}{\sin^2(x)} = \dfrac{\cos(x)x^2 - \sin^2(x)}{x^2\sin^2(x)}$

$$= \frac{\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)x^2 - \left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2}{x^2\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2}$$

$$= \frac{x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^5)-x^2+\frac{x^4}{3}+o(x^4)}{x^4+o(x^4)}$$

$$= -\frac{1}{6}+o(1)$$

donc g est en fait de classe C^1 sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, et on peut faire une IPP.

$$u_n - v_n = \left[-\frac{1}{2n+1} \cos((2n+1)x)\, g(x) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2n+1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos((2n+1)x)\, g'(x)\, dx$$

$$= 0 + \frac{1}{2n+1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos((2n+1)x)\, g'(x)\, dx$$

alors $|u_n - v_n| \leq \frac{1}{2n+1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |g'(x)|\, dx \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

* On en conclut que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \pi$, et donc $\int_{\mathbb{R}} \operatorname{sinc}(x)\, dx = \pi$

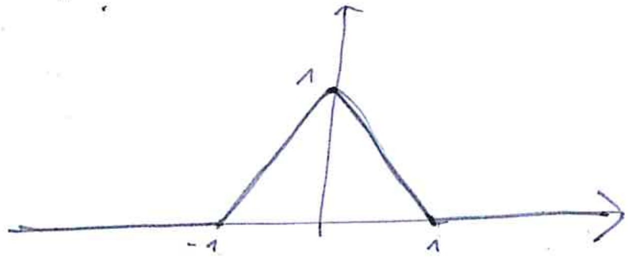
---

3. $\frac{1}{2} \chi_{[-1;1]} \in L^2$, donc le th. de Plancherel donne:

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{2} \chi_{[-1;1]}(x) \right|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sinc}^2(p)\, dp$$

et donc $\int_{\mathbb{R}} \operatorname{sinc}^2(x)\, dx = 2\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 = \pi.$

4. $f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$



$$\hat{f}(p) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} f(x)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (1+x)\, e^{-ipx}\, dx + \int_{0}^{1} (1-x)\, e^{-ipx}\, dx$$

$p \neq 0 \Rightarrow$ $$= \left[(1+x) \frac{e^{-ipx}}{-ip} \right]_{-1}^{0} + \frac{1}{ip} \int_{-1}^{0} e^{-ipx}\, dx + \left[(1-x) \frac{e^{-ipx}}{-ip} \right]_{0}^{1} - \frac{1}{ip} \int_{0}^{1} e^{-ipx}\, dx$$

$$= -\frac{1}{ip} + \frac{1}{ip} \left[-\frac{1}{ip} e^{-ipx} \right]_{-1}^{0} + \frac{1}{ip} - \frac{1}{ip} \left[-\frac{1}{ip} e^{-ipx} \right]_{0}^{1}$$

$$= \frac{1}{p^2} \left(1 - e^{+ip} + 1 - e^{-ip} \right) = \frac{-1}{p^2} \left(e^{ip} - e^{-ip} \right)^2$$

$p \neq 0 \Rightarrow \hat{f}(p) = \frac{4}{p^2}\left(\frac{e^{ip/2} - e^{-ip/2}}{2i}\right)^2 = 4\,\frac{\sin^2(p/2)}{p^2} = \text{sinc}^2\left(\frac{p}{2}\right)$

On aurait aussi pu remarquer que, d'après la feuille TD3, ex 1,

$$f = \chi_{[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]} * \chi_{[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]}$$

et $\widehat{\chi_{[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]}}(p) = \text{sinc}\left(\frac{p}{2}\right)$ d'après 1., et donc

$$\hat{f}(p) = \left(\widehat{\chi_{[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]}}\right)^2(p) = \text{sinc}^2\left(\frac{p}{2}\right).$$

5. $f \in L^2$, et donc, d'après le th. de Plancherel,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \text{sinc}^4\left(\frac{p}{2}\right)dp = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \text{sinc}^4(x)dx$$

d'où $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \text{sinc}^4(x)dx = \pi\left(\int_{-1}^{0}(1+x)^2dx + \int_0^1 (1-x)^2 dx\right)$

$$= \frac{2}{3}\pi.$$

Ex 2 : $k_0 \in \mathbb{R}$, $f \in L^1$.

1. Soit $g(x) = f(x)\cos(k_0 x) = f(x)\,\frac{e^{ik_0x} + e^{-ik_0x}}{2}$

donc $\hat{g}(p) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f(x)\left(e^{ik_0x} + e^{-ik_0x}\right)e^{-ipx}dx$

$$= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i(p-k_0)x}dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f(x)\cdot e^{-i(p+k_0)x}dx$$

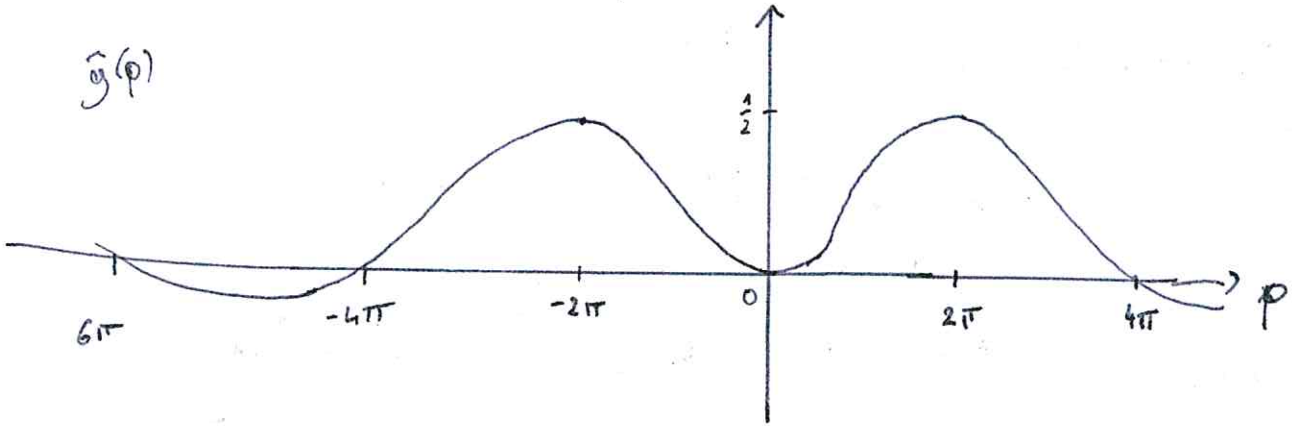
$$= \frac{1}{2}\left(\hat{f}(p-k_0) + \hat{f}(p+k_0)\right)$$

2. $g(x) = \chi_{[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]}(x)\cos(2\pi x)$. On sait que $\widehat{\chi_{[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]}}(p) = \text{sinc}\left(\frac{p}{2}\right)$,

donc $$\hat{g}(p) = \frac{1}{2}\left(\text{sinc}\left(\frac{p-2\pi}{2}\right) + \text{sinc}\left(\frac{p+2\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{-\sin(p/2)}{2}\left(\frac{1}{p/2-\pi} + \frac{1}{p/2+\pi}\right)$$

$$= \frac{-\sin\left(\frac{p}{2}\right)}{2}\frac{2\pi}{\left(\frac{p}{2}\right)^2-\pi^2} = -\frac{\pi\sin\left(\frac{p}{2}\right)}{\left(\frac{p}{2}\right)^2-\pi^2}$$



Ex 3 : 1. $f(x) = xe^{-x}H(x)$

On peut faire le calcul directement, mais on peut aussi utiliser le fait que $\mathcal{F}[x \mapsto xg(x)](p) = +i(\mathcal{F}[g])'(p)$.

On calcule alors $\mathcal{F}[x \mapsto e^{-x}H(x)]$: Soit $p \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}[x \mapsto e^{-x}H(x)](p) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x}e^{-ixp}H(x)dx = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-x(1+ip)}dx$$

$$= -\frac{1}{1+ip}\left[e^{-x(1+ip)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1+ip},$$

et donc $\mathcal{F}[f](p) = +i\left(\frac{1}{1+ip}\right)' = \frac{-i^2}{(1+ip)^2} = \frac{1}{(1+ip)^2}$.

2. On a déjà calculé la transformée de Fourier pour $n=0$ et $n=1$. Raisonnons par récurrence : montrons que

$$\mathcal{F}[x \mapsto x^n e^{-x}H(x)](p) = \frac{n!}{(1+ip)^{n+1}}$$

C'est vrai pour $n=0$ et $n=1$. Supposons que c'est vrai pour $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\mathcal{F}[x \longmapsto x^{n+1} e^{-x} H(x)](p) = +i\left(\mathcal{F}[x \longmapsto x^n e^{-x} H(x)]\right)'(p)$$

$$= +i \left(\frac{n!}{(1+ip)^{n+1}}\right)'$$

$$= \frac{(n+1)\, n!}{(1+ip)^{n+2}} = \frac{(n+1)!}{(1+ip)^{n+2}},$$

donc l'hérédité est prouvée, et $\mathcal{F}[x \mapsto x^n e^{-x} H(x)](p) = \dfrac{n!}{(1+ip)^{n+1}}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

3. $$\mathcal{F}[x \mapsto x e^{-|x|}](p) = \int_{\mathbb{R}} x e^{-|x|} e^{-ipx}\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+} x e^{-x} e^{-ipx}\, dx + \int_{\mathbb{R}_-} x e^{x} e^{-ipx}\, dx$$

$$= \mathcal{F}[x \mapsto x e^{-x} H(x)](p) + \int_{\mathbb{R}_+} -x e^{-x} e^{ipx}\, dx$$

$$= \mathcal{F}[x \longmapsto x e^{-x} H(x)](p) - \mathcal{F}[x \longmapsto x e^{-x} H(x)](-p)$$

$$= \frac{1}{(1+ip)^2} - \frac{1}{(1-ip)^2} = \frac{(1-ip)^2 - (1+ip)^2}{(1+ip)^2(1-ip)^2}$$

$$= \cancel{\frac{2(1+p^2)}{(1+p^2)^2}} - \frac{4ip}{(1+p^2)^2}$$

<u>Ex 4</u> : $$f(x) = \frac{\cos(\pi x)}{\pi(x-\frac{1}{2})} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi x\right)}{\pi(x-\frac{1}{2})} = -\operatorname{sinc}\left(\pi(x-\tfrac{1}{2})\right)$$

alors $$\hat{f}(p) = -e^{-\frac{1}{2}ip}\, \mathcal{F}[x \mapsto \operatorname{sinc}(\pi x)](p)$$

$$= -e^{-\frac{1}{2}ip}\, \mathcal{F}\left(\mathcal{F}\left[\tfrac{1}{2\pi}\chi_{[-\pi;\pi]}\right]\right)(p)$$

$$= -e^{-\frac{1}{2}ip}\, 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi}\, \chi_{[-\pi;\pi]}(-p)$$

$$\hat{f}(p) = -e^{-\frac{1}{2}ip}\, \chi_{[-\pi;\pi]}(p)$$

Ex 5 : 1. On commence par calculer $\mathcal{F}[x \mapsto e^{-2|x|}]$.

$$\mathcal{F}[x \mapsto e^{-2|x|}](p) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2|x|} e^{-ixp} dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+} e^{-x(2+ip)} dx + \int_{\mathbb{R}_-} e^{-x(-2+ip)} dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2+ip} e^{-x(2+ip)} \right]_0^{+\infty} + \left[\frac{1}{2-ip} e^{-x(-2+ip)} \right]_{-\infty}^0$$

$$= \frac{1}{2+ip} + \frac{1}{2-ip} = \frac{2-ip+2+ip}{(2+ip)(2-ip)} = \frac{4}{4+p^2}$$

Appliquons maintenant la transformée de Fourier à l'équation différentielle :

$$-f''(x) + f(x) = e^{-2|x|}.$$

$$-\mathcal{F}[f''](p) + \mathcal{F}[f](p) = \frac{4}{4+p^2}$$

$$-(-ip)^2 \hat{f}(p) + \hat{f}(p) = \frac{4}{4+p^2} \iff \hat{f}(p) = \frac{4}{(4+p^2)(1+p^2)}$$

On décompose en éléments simples : il existe d'uniques $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{4}{(4+p^2)(1+p^2)} = \frac{ap+b}{4+p^2} + \frac{cp+d}{1+p^2}$$

et alors $a(2i)+b = \left.\frac{4}{1+p^2}\right|_{p=2i} = -\frac{4}{3}$, donc $a=0$ et $b=-\frac{4}{3}$

$ci+d = \left.\frac{4}{4+p^2}\right|_{p=i} = \frac{4}{3}$, donc $c=0$ et $d=\frac{4}{3}$

d'où finalement : $\hat{f}(p) = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{1+p^2} - \frac{1}{4+p^2}\right)$

2. Par le même calcul que dans la question précédente, on montre que si $\alpha > 0$, alors

$$\mathcal{F}[x \longmapsto e^{-\alpha|x|}](p) = \frac{1}{\alpha + ip} + \frac{1}{\alpha - ip} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + p^2}$$

et on peut donc inverser la transformée de Fourier

$$\hat{f}(p) = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{1+p^2} - \frac{1}{4+p^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{2}{3} e^{-|x|} - \frac{1}{3} e^{-2|x|}$$