$\boxed{\text{TD6}}$

Distributions

Ex 1 :

1. $T = T_{\mathbb{1}_{[-1;1]}}$

Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$

$$T'(\varphi) = -T(\varphi') = -\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-1;1]}(x)\varphi'(x)dx$$
$$= -\int_{-1}^{1} \varphi'(x)dx$$
$$= -\varphi(1) + \varphi(-1)$$

donc $T' = \delta_{-1} - \delta_1$

$T'' = \delta_{-1}' - \delta_1'$.

2. $T = T_{f\mathbb{1}_{[-1;1]}}$, $f \in C^\infty$

$$T'(\varphi) = -T(\varphi') = -\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-1;1]}(x) f(x)\varphi'(x)dx$$
$$= -\int_{-1}^{1} f(x)\varphi'(x)dx$$
$$= -\left[f(x)\varphi(x)\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} f'(x)\varphi(x)dx$$

donc $T' = f(-1)\delta_{-1} - f(1)\delta_1 + T_{f'\mathbb{1}_{[-1;1]}}$

On peut alors dériver, et réutiliser le résultat de ce calcul :

$$T'' = f(-1)\delta_{-1}' - f(1)\delta_1' + \left(T_{f'\mathbb{1}_{[-1;1]}}\right)'$$
$$= f(-1)\delta_{-1}' - f(1)\delta_1' + f'(-1)\delta_{-1} - f'(1)\delta_1 + T_{f''\mathbb{1}_{[-1;1]}}.$$

3. $T = T_{\lfloor x \rfloor}$, $T'(\varphi) = -T(\varphi') = -\int_{\mathbb{R}} \lfloor x \rfloor \varphi'(x)dx$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} -\int_{n}^{n+1} n\,\varphi'(x)dx$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n(\varphi(n) - \varphi(n+1)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n\varphi(n) - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n\varphi(n+1)$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n\varphi(n) - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (n-1)\varphi(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(n)$$

d'où $T' = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n = Ш_1$

et $T'' = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n' = Ш_1'$

4. $T = T_{|x|}$, $T_{|x|}'(\varphi) = -\int_{\mathbb{R}} |x| \varphi'(x)dx = \int_{\mathbb{R}_+} -x\varphi'(x)dx + \int_{\mathbb{R}_-} x\varphi'(x)dx$

$$= \cancel{\left[-x\varphi(x)\right]_0^{+\infty}} + \int_0^{+\infty} \varphi(x)dx + \cancel{\left[x\varphi(x)\right]_{-\infty}^0} - \int_{-\infty}^0 \varphi(x)dx$$

donc $T_{|x|}' = T_g$, où $g(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$

ou encore : $g = 2H - 1$, où H est la fonction de Heaviside

On trouve alors : $T'' = 2\delta_0$ (puisque $T_H' = \delta_0$)

5. $T = T_{H(x)\sin(x)}$ $\quad T'(\varphi) = -\int_{\mathbb{R}} H(x)\sin(x)\varphi'(x)dx = -\int_{\mathbb{R}_+} \sin(x)\varphi'(x)dx$

$$= -\cancel{\left[\sin(x)\varphi(x)\right]_0^{+\infty}} + \int_0^{+\infty} \cos(x)\varphi(x)dx$$

et donc $T' = T_{H\cdot\cos}$. On calcule T'' dans la question 6.

6. $T = T_{H\cdot\cos}$ $\quad T'(\varphi) = -\int_{\mathbb{R}} H(x)\cos(x)\varphi'(x) = -\int_{\mathbb{R}_+} \cos(x)\varphi'(x)dx$

$$= -\left[\cos(x)\varphi(x)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \sin(x)\varphi(x)dx$$

$$= \varphi(0) - \int_0^{+\infty} \sin(x)\varphi(x)dx$$

d'où $T' = \delta_0 - T_{H\sin} \left(= T_{H\sin}''\right)$

et donc $T'' = \delta_0' - T_{H\cos}$

Ex 2 :

1. ~~D'après l'ex~~ Les primitives de δ_0' sont les $\delta_0 + CT_1$, $C \in \mathbb{R}$.

2. D'après l'exercice 1, les primitives de $T_{\mathrm{sgn}(x)} = T_{2H-1}$ sont les $T_{|x|} + CT_1$, $C \in \mathbb{R}$.

3. $\left((1+x)\delta_a\right)(\varphi) = \delta_a\left((1+x)\varphi(x)\right)$

$$= (1+a)\varphi(a)$$

donc $(1+x)\delta_a = (1+a)\delta_a$, et les primitives de cette distribution sont les ~~…~~ $(1+a)T_{H(x-a)} + CT_1$, $C \in \mathbb{R}$.

4. $\left((1+x)^2\delta_0'\right)(\varphi) = \delta_0'\left((1+x)^2\varphi(x)\right) = -\delta_0\left(\left((1+x)^2\varphi(x)\right)'\right)$

$$= -\delta_0\left(2(1+x)\varphi(x) + (1+x)^2\varphi'(x)\right)$$

$$= -2\varphi(0) - \varphi'(0)$$

donc $(1+x^2)\delta_0' = -2\delta_0 + \delta_0'$

Les primitives sont donc les $-2T_H + \delta_0 + CT_1$, $C \in \mathbb{R}$.

5. On a vu dans l'exo 1 que $T_{\lfloor x \rfloor}' = Ш_1$. On montre de la même manière que pour $T>0$, $(T_{\lfloor x/T \rfloor})' = Ш_T$,

et donc les primitives de $Ш_T$ sont les $T_{\lfloor x/T \rfloor} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

6. $f(x) = |x|^{\frac{1}{2}}$ est C^0 sur $\mathbb{R}$, C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, de dérivée

$$f'(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x) |x|^{-\frac{1}{2}}$$

On en déduit que $x \longmapsto 2 \operatorname{sgn}(x) |x|^{\frac{1}{2}}$ est C^0 sur $\mathbb{R}$ (puisque $f(0)=0$) et C^1 p.m., ce qui implique que

$$\left(T_{2 \operatorname{sgn}(x)|x|^{\frac{1}{2}}}\right)' = T_{|x|^{-\frac{1}{2}}}.$$ Les primitives de cette dernière

sont donc les $T_{2\operatorname{sgn}(x)|x|^{\frac{1}{2}} + C}$, $C \in \mathbb{R}$

7.
$$\begin{aligned}((1+x)\delta_0'')(\varphi) &= \delta_0''\big((1+x)\varphi(x)\big) \\ &= \delta_0\big(((1+x)\varphi(x))''\big) \\ &= \delta_0\big((1+x)\varphi''(x) + 2\varphi'(x)\big) = \varphi''(0) + 2\varphi'(0)\end{aligned}$$

donc $(1+x)\delta_0'' = \delta_0'' - 2\delta_0'$, et ses primitives sont

les $\delta_0' - 2\delta_0 + CT_1$, $C \in \mathbb{R}$.

<u>Exo 3</u> $\quad u' + au = T$

~~1. $u' + xu = \delta_0$~~

~~On commence par chercher une primitive de x : $x \mapsto x^2/2$~~

Méthode générale : on commence par chercher une primitive A de a. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}(ue^A)' &= u'e^A + A'e^A \\ &= (u' + au)e^A = e^A T\end{aligned}$$

Il suffit ensuite d'intégrer $e^A T$.

1. $u' + xu = \delta_0$, On pose $A(x) = \frac{x^2}{2}$, alors $(e^{\frac{x^2}{2}}u)' = e^{\frac{x^2}{2}}\delta_0$

Or, $e^{\frac{x^2}{2}}\delta_0 = \delta_0$

alors $\left(ue^{\frac{x^2}{2}}\right)' = \delta_0 \iff \exists C \in \mathbb{R}$ tq $ue^{\frac{x^2}{2}} = T_{H+C}$

$$\iff u = T_{(H+C)e^{-\frac{x^2}{2}}}$$

2. $a(x) = 1$, $T = H$

$A(x) = x$, $\left(ue^{x}\right)' = e^{x}H$

$$\Rightarrow ue^{x} = \begin{cases} e^{x} + C & \text{sur } \mathbb{R}_+ \\ D & \text{sur } \mathbb{R}_- \end{cases}$$

Comme $(ue^x)'$ est une fonction, ue^x n'a pas de saut en 0, et donc $D = C+1$.

Finalement, l'ensemble des solutions est

$$\left\{ x \longmapsto \begin{cases} 1 + Ce^{-x} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+ \\ (1+C)e^{-x} & \text{si } x \in \mathbb{R}_- \end{cases}, \ C \in \mathbb{R} \right\}$$

3. $a(x) = (1-x)$, on choisit $A(x) = -\frac{(1-x)^2}{2}$
$T = \delta_0'$

alors $\left(ue^{-\frac{(1-x)^2}{2}}\right)' = e^{-\frac{(1-x)^2}{2}}\delta_0'$

Or, $\left(e^{-\frac{(1-x)^2}{2}}\delta_0'\right)(\varphi) = \delta_0\left(\left(e^{-\frac{(1-x)^2}{2}}\varphi(x)\right)'\right) = \delta_0\left(e^{-\frac{(1-x)^2}{2}}\left((1-x)\varphi(x) + \varphi'(x)\right)\right)$

$$= e^{-\frac{1}{2}}\left(\varphi(0) + \varphi'(0)\right)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}}\left(\delta_0 - \delta_0'\right)(\varphi)$$

Ainsi, $\left(ue^{-\frac{(1-x)^2}{2}}\right)' = e^{-\frac{1}{2}}(\delta_0 - \delta_0')$

donc $\exists C \in \mathbb{R}$ tq $ue^{-\frac{(1-x)^2}{2}} = C + e^{-\frac{1}{2}}H - e^{-\frac{1}{2}}\delta_0$

$$\Rightarrow u = Ce^{\frac{(1-x)^2}{2}} + e^{\frac{(1-x)^2}{2}-\frac{1}{2}}H - e^{\frac{(1-x)^2}{2}-\frac{1}{2}}\delta_0$$

$$\boxed{u = Ce^{\frac{(1-x)^2}{2}} + e^{-x+\frac{x^2}{2}}H(x) - e^{-\frac{1}{2}}\delta_0}$$

Ex 4 :

1. $T_n = T_{n\mathbb{1}_{[-1;1]}(nx)}$ $\qquad T_n(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} n\,\mathbb{1}_{[-1;1]}(nx)\,\varphi(x)\,dx$

$$\underset{y=nx}{=} \int \mathbb{1}_{[-1;1]}(y)\,\varphi\left(\frac{y}{n}\right)dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \varphi\left(\frac{y}{n}\right)dy$$

Soit $y \in [-1;1]$. $\varphi(\frac{y}{n}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \varphi(0)$ par continuité. De plus, $\varphi \in C_c^\infty$, donc elle est bornée : $\exists M > 0$ tq $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\varphi(x)| \leq M$.
En particulier, $x \mapsto M$ est intégrable sur $[-1;1]$, on peut donc intervertir limite et intégrale (d'après le théorème de convergence dominée) :

$$\int_{-1}^{1} \varphi\left(\frac{y}{n}\right) dy \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_{-1}^{1} \varphi(0)\, dy = 2\varphi(0)$$

On a donc mq $T_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2\delta_0$.

2. $T_n = n\left(\delta_{-\frac{1}{n}} - \delta_{\frac{1}{n}}\right)$

$$T_n(\varphi) = n\left(\varphi\left(-\frac{1}{n}\right) - \varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \frac{\varphi(-\frac{1}{n}) - \varphi(0) + \varphi(0) - \varphi(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = -\frac{\varphi(0) - \varphi(-\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} - \frac{\varphi(0) - \varphi(\frac{1}{n})}{0 - \frac{1}{n}}$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} -\varphi'(0) - \varphi'(0)$$

donc $T_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2\delta_0'$. (On aurait aussi pu remarquer que $\left(n\, \mathbb{1}_{[-1;1]}(nx)\right)' = n\left(\delta_{-\frac{1}{n}} - \delta_{\frac{1}{n}}\right)$)

3. $T_n = T_{e^{x/n}}$

$$T_n(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} e^{x/n} \varphi(x)\, dx$$

. Or, si $x \in \mathbb{R}$, $e^{x/n}\varphi(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \varphi(x)$

De plus, $\varphi \in C_c^\infty$, donc $\exists\, b > 0$ tq $\varphi(x) = 0$ si $|x| \geq b$, ~~Alors~~ et φ est bornée, $\exists M > 0$ tq $|\varphi| \leq M$. Alors

$$|e^{x/n}\varphi(x)| \leq M e^{b/n} \mathbb{1}_{[-b;b]}(x) \leq \underbrace{M e^{b} \mathbb{1}_{[-b;b]}(x)}_{L^1 \text{ et indépendant de } n}$$

D'après le théorème de CVD,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{x/n} \varphi(x)\, dx \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx$$

donc $T_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} T_{\mathbb{1}}$

4. $T_n = T_{e^{-nx^2}}$, $T_n(\varphi) = \int \varphi(x) e^{-nx^2} dx$

$$\text{Si } x \neq 0, \quad e^{-nx^2}\varphi(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Le TCVD s'applique comme dans la question précédente,

et $T_n(\varphi) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \mathbb{1}_{\{0\}}(x)\, dx = 0$

donc $T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

5. $T_n = \sqrt{n}\, T_{e^{-nx^2}}$, $T_n(\varphi) = \int \varphi(x) \sqrt{n} e^{-nx^2} dx$

$$y = \sqrt{n}\,x \qquad = \int \varphi\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right) e^{-y^2} dy$$

φ est bornée, donc le TCVD s'applique encore :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right) e^{-y^2} dy = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} \varphi\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right) e^{-y^2} dy$$

$$= \varphi(0) \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}\,\varphi(0)$$

et $T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi \delta_0$

Ex 5 : $a \in \mathbb{R}$

1. $((x-a)\delta_a)(\varphi) = \delta_a((x-a)\varphi(x)) = (a-a)\varphi(a) = 0$

donc $(x-a)\delta_a = 0$

2. $((x-a)\delta_a')(\varphi) = -\delta_a(((x-a)\varphi(x))') = -\delta_a(\varphi(x) + (x-a)\varphi'(x))$

$= -\varphi(a)$

donc $(x-a)\delta_a' = -\delta_a$

3. $((x-a)^2\delta_a') = -\delta_a(2(x-a)\varphi(x) + (x-a)^2\varphi'(x)) = 0$

donc $(x-a)^2\delta_a' = 0$

Ex 6 : On rappelle le théorème du cours :

$\boxed{\text{Th}}$: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1_{pm}, avec des sauts (éventuels) en $\{a_1, \dots, a_n\}$. Alors

$$(T_f)' = T_{f'} + \sum_{i=1}^{n} \left(f(a_i^+) - f(a_i^-)\right) \delta_{a_i}$$

1. $f : x \longmapsto e^{\lambda x} H(x)$ est C^1 p.m. et admet un saut en 0.

De plus, si $x \neq 0$, $f'(x) = \lambda e^{\lambda x} H(x) + \underbrace{e^{\lambda x} H'(x)}_{=0}$
$= \lambda f(x)$

donc $(T_f)' = T_{\lambda f} + \left(f(0^+) - f(0^-)\right)\delta_0$

$= \lambda T_f + \delta_0$

d'où $\left(\frac{d}{dx} - \lambda\right) T_f = \delta_0$

2. $f : x \longmapsto \frac{\sin(\omega x)}{\omega} H(x)$ est $C^1_{p.m}$, et n'admet aucun saut puisque $f(0^+) = f(0^-) = 0$.

Si $x \neq 0$, $f'(x) = \cos(\omega x) H(x) + 0$

Or, $x \longmapsto \cos(\omega x) H(x)$ est elle aussi C^1 p.m. et admet un unique saut en 0. Alors

$$(T_f)'' = \left(T_{\cos(\omega x) H(x)}\right)' = T_{-\omega \sin(\omega x) H(x)} + \left(\cos(0^+) H(0^+) - 0\right)\delta_0$$

$$= -\omega^2 T_f + \delta_0$$

d'où $\left(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2\right) T_f = \delta_0$

Ex 7 :

1. $\delta_0 * T_{\mathbb{1}_{[0,1]}} (\varphi) = \iint \delta_0(x) \mathbb{1}_{[0,1]}(y) \varphi(x+y) \, dx dy$

$= \int \mathbb{1}_{[0,1]}(y) \varphi(y) dy$, car $\int_{\mathbb{R}} \delta_0(x) \varphi(x+y) dx = \varphi(y)$

$= T_{\mathbb{1}_{[0,1]}} (\varphi)$

<u>Remarque</u> : la notation qu'on utilise ici n'est <u>pas</u> rigoureuse, mais elle est valide pour δ et ses dérivées.

2. $\delta_0' * T_{\sin(x)H(x)}(\varphi) = \cancel{\iint \delta_0'(x)\sin(y)H(y)\varphi(x+y)dy}$

$$= \left(\delta_0 * T_{\sin(x)H(x)}\right)'(\varphi)$$

$$= -\iint_{\mathbb{R}} \delta_0(x)\sin(y)H(y)\varphi'(x+y)dy$$

$$= -\int_{\mathbb{R}} \sin(y)H(y)\left(\int_{\mathbb{R}} \delta_0(x)\varphi'(x+y)dx\right)dy$$

$$= -\int_{\mathbb{R}} \sin(y)H(y)\varphi'(y)dy$$

$$= -T_{\sin(x)H(x)}(\varphi') = \left(T_{\sin(x)H(x)}\right)'(\varphi)$$

Donc, d'après l'exo 1, $\delta_0' * T_{\sin(x)H(x)} = \left(T_{\sin(x)H(x)}\right)' = T_{\cos(x)H(x)}$

3. $\delta_a * \delta_b(\varphi) = \iint \delta_a(x)\delta_b(y)\varphi(x+y)dx\,dy = \int \delta_b(y)\varphi(a+y)dy$

$$= \varphi(a+b)$$

donc $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$

4. $\delta_0' * H = \delta_0 * H' = \delta_0 * \delta_0 = \delta_0$ d'après la question précédente.

5. $Ш_4 * T_{1\!\!1_{[-1;1]}} = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{4n}\right) * T_{1\!\!1_{[-1;1]}}$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{4n} * T_{1\!\!1_{[-1;1]}}$$

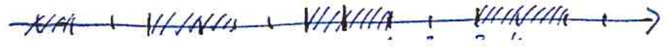
. Or, $\delta_a * T_f = T_{f_a}$, où $f_a(x) = f(x-a)$

donc $\delta_{4n} * T_{1\!\!1_{[-1;1]}} = T_{1\!\!1_{[-1;1]}(x-4n)}$

$$= T_{1\!\!1_{[-1+4n,\,1+4n]}}$$

et donc $Ш_4 * T_{1\!\!1_{[-1;1]}} = T_I$, avec $I = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [-1+4n; 1+4n]$

I :



8