Préparation à l'agrégation interne de mathématiques
Polynômes - Mercredi 3 juillet 2013

1 L'anneau (et algèbre) $\mathbf{K}[X]$ des polynômes, degré

Exercice 1. (inversibles et irréductibles)

1. *Démontrer que les polynômes inversibles sont les polynômes constants non nuls.*
2. *Démontrer que les polynômes de degré* 1 *sont irréductibles.*

Exercice 2. (division euclidienne)

Effectuer la division euclidienne dans $\mathbf{R}[X]$ *de* $X^4 - 2X^3 - X^2 + X - 1$ *par* $X^2 + X + 1$.

Exercice 3. (l'anneau $\mathbf{K}[X]$ est euclidien donc principal)

1. *À l'aide d'une division euclidienne, démontrer que pour tout idéal* I *de* $\mathbf{K}[X]$*, il existe un polynôme* P *dans* I *tel que* $I = \{PQ : Q \in \mathbf{K}[X]\}$.
2. *Si* u *est un endomorphisme d'un espace vectoriel sur* $\mathbf{K}$*, qu'obtient-on en considérant*

$$\{P \in \mathbf{K}[X] : P(u) = 0\}?$$

Exercice 4. (divisibilité et polynôme dérivé)

1. *Si* $P \mid Q$*, a-t-on* $P' \mid Q'$ *? Et la réciproque ?*
2. *Soient* P *et* Q *deux polynômes appartenant à* $\mathbf{K}[X]$ *et* n *un entier naturel non nul. Montrer que*

$$P^n \mid Q \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} P^{n-1} \mid Q'.$$

3. *Soient* P *et* Q *deux polynômes à coefficients dans un corps* $\mathbf{K}$ *de caractéristique nulle et* n *un entier naturel non nul. Démontrer que, si* P *est irréductible :*

$$P^n|Q \text{ et } P^n|Q' \Longleftrightarrow P^{n+1}|Q.$$

2 Évaluation, fonction polynomiale, racines

Exercice 5. (schéma de Hörner)

Déterminer, en utilisant le schéma de Hörner, la valeur en 2 *du polynôme*

$$P = 3X^5 - 4X^4 + 3X^3 - 10X^2 - 5X + 4.$$

Combien ce calcul nécessite-t-il d'opérations ? Comparer avec le calcul « naïf ».

Exercice 6. (entrelacements de racines)

Soit P *un polynôme à coefficients réels.*

1. *On suppose que* P *admet* k *racines réelles distinctes. Montrer que le polynôme dérivé* P' *admet au moins* $k-1$ *racines réelles distinctes. (Utiliser le théorème de Rolle.)*

2. *Même question en remplaçant « distinctes » par « comptées avec multiplicité ».*
3. *On suppose que P est scindé sur $\mathbf{R}$. Justifier que P' est également scindé sur $\mathbf{R}$.*

Exercice 7. (morphisme d'évaluation)

Toute expression polynomiale $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ à coefficients dans un corps $\mathbf{K}$ peut être évaluée en un élément x de $\mathbf{K}$:

$$\tilde{P}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

et permet ainsi de définir une fonction de $\mathbf{K}$ dans $\mathbf{K}$.

1. *Justifier que sur $\mathbf{K} = \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$, deux polynômes différents définissent deux fonctions différentes.*
2. *Traduire (et généraliser, préciser, amender...) ce résultat à l'aide du* morphisme d'évaluation *:*

$$\mathbf{K}[X] \longrightarrow \mathbf{K}^{\mathbf{K}} \,:\, P \longmapsto \tilde{P}$$

3 Interpolation de Hermite

Exercice 8. (avec de l'algèbre linéaire dedans)

Soient $a \neq b$ et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ six nombres réels. On recherche un polynôme réel P de degré inférieur ou égal à 3 tel que

$$P(a) = \alpha, \qquad P(b) = \beta, \qquad P'(a) = \gamma, \qquad P'(b) = \delta.$$

1. *Justifier que les coefficients du polynôme recherché sont solutions d'un système linéaire que l'on précisera.*
2. *En déduire qu'il existe un unique polynôme répondant au problème.*

Exercice 9. *Adopter la même méthode pour justifier qu'il existe un unique polynôme réel P de degré inférieur ou égal à 3 tel que*

$$P(a) = \alpha, \qquad P(b) = \beta, \qquad P'(a) = \gamma, \qquad P''(a) = \delta.$$

où $a \neq b$ et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont six nombres réels.