Préparation à l'agrégation interne de mathématiques
Polynômes et fractions rationnelles - Résumé de résultats

Je renvoie aux livres [Mon06] et [Gou94] pour plus de détails et de démonstrations.

1 Les polynômes

Dans toute la suite, $\mathbf{K}$ désignera un corps (commutatif). Penser à

$$\begin{cases} \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{Q} \text{ de caractéristique } 0 : & k \times 1 = 0 \Leftrightarrow k = 0 \\ \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \text{ de caractéristique } p \ (p \text{ premier}) : & k \times 1 = 0 \Leftrightarrow k \in p\mathbf{Z} \end{cases}$$

Une liste de définitions/vocabulaires :

1. Un *polynôme* P à coefficients dans $\mathbf{K}$ est une « suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ indexée sur $\mathbf{N}$ d'éléments de $\mathbf{K}$ tous nuls sauf un nombre fini » (les *coefficients* de P). Plus habituellement, on note
$$P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k = a_d X^d + \ldots + a_1 X + a_0.$$
2. Si P n'est pas nul, son *degré* $deg(P)$ est le plus grand entier d tel que $a_d \neq 0$.
On convient que $deg(0) = -\infty$.
3. Un *monôme* est un polynôme dont au plus un des coefficients est non nul.
4. Un polynôme est *unitaire* si son coefficient $a_{deg(P)}$ de plus haut degré est égal à 1.
5. La somme, la différence, le produit de deux polynômes, le produit d'un polynôme par un élément de $\mathbf{K}$ ont un sens naturel et possèdent les propriétés requises (commutativité, associativité, distributivité, ...) pour que l'ensemble $\mathbf{K}[X]$ des polynômes soit muni d'une structure d'anneau, de $\mathbf{K}$-espace vectoriel et de $\mathbf{K}$-algèbre.
6. La composition de deux polynômes a également un sens et n'est pas commutative.

Propriété 1.1 (du degré)**.** *Pour tous polynômes P et Q (si nul(s) : arithmétique dans $\mathbf{Z}\cup\{-\infty\}$) :*

1. $deg(P \pm Q) \leqslant \max(deg(P); deg(Q))$ *(avec égalité si $deg(P) \neq deg(Q)$)*
2. $deg(PQ) = deg(P) + deg(Q)$ *(donc $deg(\lambda P) = deg(P)$ si $\lambda \in \mathbf{K}^*$)*
3. *Conséquence : si $P|Q$ alors $deg(P) \leqslant deg(Q)$*
4. *Conséquence : les polynômes inversibles de $\mathbf{K}[X]$ sont les polynômes constants non nuls*

Définition 1.1. *Un polynôme de $\mathbf{K}[X]$ est* irréductible *(ou* premier*) sur $\mathbf{K}$ si les seuls diviseurs de P sont les constantes (les inversibles) ou les λP, $\lambda \in \mathbf{K}^*$.*

Tout comme $\mathbf{Z}$, l'anneau $\mathbf{K}[X]$ est muni d'une division euclidienne :

Théorème 1 (division euclidienne dans l'anneau des polynômes sur $\mathbf{K}$)**.**
Pour tous polynômes A et B, B non nul, il existe un unique couple $(Q; R)$ de polynômes vérifiant :

$$A = BQ + R \text{ et } deg(R) < deg(B).$$

Les notions de $PGCD$, $PPCM$ (polynômes **unitaires**), de décomposition en facteurs irréductibles, les théorèmes de Bézout, de Gauss sont encore valables sur $\mathbf{K}[X]$.

Définition 1.2 (dérivation)**.** *Le* polynôme dérivé *de* $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k = a_d X^d + \ldots + a_1 X + a_0$ *est le polynôme* $P' = \sum_{k=1}^{d} k a_k X^{k-1} = d a_d X^{d-1} + \ldots + a_1$.
On définit par récurrence le polynôme dérivé $P^{(n)} = \left(P^{(n-1)}\right)'$.

Propriété 1.2. 1. *$deg(P') \leqslant deg(P) - 1$ si $P \neq 0$ (avec égalité si $deg(P) \neq 0$ dans $\mathbf{K}$)*

2. *$(P \pm Q)' = P' \pm Q'$; $(\lambda P)' = \lambda P'$; $(PQ)' = P'Q + PQ'$.*

3. *Formule de Leibniz : $(PQ)^{(k)} = \sum_{i=O}^{k} \binom{k}{i} P^{(i)} Q^{(k-i)}$*

2 Fonctions polynomiales et racines

Si P appartient à $\mathbf{K}[X]$, on peut l'*évaluer* en tout nombre x de $\mathbf{K}$. On associe à P la *fonction polynomiale* $\tilde{P}$:

$$\tilde{P} : \mathbf{K} \longrightarrow \mathbf{K} : x \longmapsto \sum_{k=0}^{d} a_k x^k = a_d x^d + \ldots + a_1 x + a_0$$

Théorème 2 (racine et multiplicité)**.** *Soient P appartenant à $\mathbf{K}[X]$ et a un élément de $\mathbf{K}$.*

1. ***racine** :*

$$\tilde{P}(a) = 0 \Longleftrightarrow X - a \mid P \ (\textit{dans } \mathbf{K}[X])$$

2. ***racine de multiplicité** $\alpha \geqslant 1$:*

$$P = (X-a)^{\alpha} Q \textit{ et } \tilde{Q}(a) \neq 0 \Longleftrightarrow (X-a)^{\alpha} | P \textit{ et } (X-a)^{\alpha+1} \nmid P \ (\textit{dans } \mathbf{K}[X])$$

3. *(avec Gauss) $a_1, \ldots, a_r$ (appartenant à $\mathbf{K}$) sont r racines distinctes de multiplicité respective $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ si et seulement si $(X-a_1)^{\alpha_1} \ldots (X-a_r)^{\alpha_r}$ divise P dans $\mathbf{K}[X]$.*

La troisième équivalence permet de majorer le nombre de racines (comptées avec multiplicités) par le degré : $\alpha_1 + \ldots + \alpha_r \leqslant deg(P)$.

Attention : si $P = X^p - X$ dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[X]$, alors la fonction associée est identiquement nulle sur $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ (c'est le petit théorème de Fermat).

On peut identifier polynôme et fonction polynomiale sur $\mathbf{K} = \mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ en vertu de la

Propriété 2.1. *L'application $\mathbf{K}[X] \longrightarrow \mathbf{K}^{\mathbf{K}} : P \longmapsto \tilde{P}$ est injective si et seulement si $\mathbf{K}$ est infini.*

Propriété 2.2. *Le corps $\mathbf{K}$ est ici supposé de **caractéristique nulle** (donc infini).*
Soient P appartenant à $\mathbf{K}[X]$ et un élement a de $\mathbf{K}$.

1. ***Formule de Taylor :***

$$P = \sum_{k=0}^{deg(P)} P^{(k)}(a) \frac{(X-a)^k}{k!}.$$

2. *Le nombre a est racine de P de multiplicité α si et seulement si*

$$P(a) = \ldots = P^{(\alpha-1)}(a) = 0 \textit{ et } P^{(\alpha)}(a) \neq 0.$$

Propriété 2.3. *Sur $\mathbf{R}$ et/ou $\mathbf{C}$:*

1. *(d'Alembert-Gauss) Tout polynôme de $\mathbf{C}[X]$ de degré au moins 1 admet une racine dans $\mathbf{C}$.*
2. *Les polynômes irréductibles de $\mathbf{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.*
3. *Si P et Q appartiennent à $\mathbf{C}[X]$, alors P divise Q si et seulement si toute racine de P de multiplicité k est racine de Q de multiplicité au moins k.*
4. *Tout polynôme de $\mathbf{R}[X]$ de degré impair admet une racine dans $\mathbf{R}$.*
5. *Les polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 sans racine réelle.*

Définition 2.1. *Les* fonctions symétriques élémentaires *en les n variables $x_1, \ldots, x_n$ sont les n expressions (« somme des produits de k variables distinctes »)*

$$\sigma_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} x_{i_1} \ldots x_{i_k} = x_1 x_2 \ldots x_k + \ldots + x_{n-k+1} \ldots x_n \quad \textit{pour} \quad k = 1, \ldots, n.$$

$$\sigma_1 = x_1 + \ldots + x_n \quad ; \quad \sigma_2 = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} = x_1 x_2 + \ldots + x_{n-1} x_n \quad ; \quad \ldots \quad ; \quad \sigma_n = x_1 x_2 \ldots x_n$$

Propriété 2.4 (relations entre coefficients et racines)**.** *Soit P un polynôme de degré n dans $\mathbf{K}[X]$, supposé scindé sur $\mathbf{K}$, de racines $x_1, \dots, x_n$ (comptées avec multiplicité) :*

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_n \prod_{k=1}^{n} (X - x_k)\,.$$

Alors :

$$\sigma_1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad ; \quad \dots \quad ; \quad \sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n} \quad ; \quad \dots \quad ; \quad \sigma_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

3 Fractions rationnelles et décomposition en éléments simples

L'ensemble $\mathbf{K}(X)$ des *fractions rationnelles* est défini à partir de $\mathbf{K}[X]$ de manière analogue à $\mathbf{Q}$ à partir de $\mathbf{Z}$: il s'agit du *corps des fractions.* Une fraction rationnelle est donc (la classe d'équivalence d') un élément de la forme $\frac{P}{Q}$ avec P et Q dans $\mathbf{K}[X]$ et Q non nul.

1. L'addition et le produit (usuels) de fractions munissent $\mathbf{K}(X)$ d'une structure de corps commutatif infini (quel que soit $\mathbf{K}$).
2. Le degré $deg\left(\frac{P}{Q}\right) = deg(P) - deg(Q)$ de la fraction rationnelle ne dépend pas du représentant.
3. Tout élément F de $\mathbf{K}(X)$ admet un *représentant irréductible* $\frac{P}{Q}$, P et Q premiers entre eux. Un tel couple $(P;Q)$ est unique à un multiple (scalaire) non nul près.
4. La dérivation des polynômes s'étend aux fractions rationnelles avec les formules usuelles.
5. On a $deg(F') \leqslant deg(F) - 1$ mais l'inégalité peut être stricte même en caractéristique nulle comme pour l'exemple $F = \frac{X}{X+1}$.

Définition 3.1 (zéros et pôles)**.** *Soit $F = \frac{P}{Q}$ un représentant irréductible.*

1. *Un* zéro *(d'ordre k) de F est une racine (d'ordre k) du numérateur P.*
2. *Un* pôle *(d'ordre k) de F est une racine (d'ordre k) du numérateur Q.*

Zéros et pôles ne dépendent pas du représentant irréductible choisi (mais bien sûr du corps $\mathbf{K}$). Zéros et pôles forment des ensembles finis (si $P \neq 0$) et disjoints car P et Q n'ont aucun facteur commun.

À toute fraction rationnelle F, on peut associer la *fonction rationnelle* $\tilde{F} : \mathbf{K}\backslash\mathcal{P} \longrightarrow \mathbf{K}$ définie sur le corps $\mathbf{K}$ privé de l'ensemble $\mathcal{P}$ des pôles de F.

Théorème 3 (décomposition en éléments simples)**.** *Soient $F = \frac{A}{B}$ un représentant irréductible d'une fraction rationnelle F sur $\mathbf{K}$ et $B = \lambda B_1^{\alpha_1} \dots B_r^{\alpha_r}$ la décomposition de B en produit de polynômes irréductibles, premiers entre eux et unitaires ($\lambda \in \mathbf{K}^*$, B_i irréductible unitaire, $PGCD(B_i; B_j) = 1$ si $i \neq j$ et $\alpha_i \in \mathbf{N}^*$). Alors, il existe une unique famille de polynômes notée E, C_{ik} telle que :*

$$F = \frac{A}{\lambda B_1^{\alpha_1} \dots B_r^{\alpha_r}} = E + \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{\alpha_i} \frac{C_{ik}}{(B_i)^k} \right) \quad \text{et} \quad deg(C_{ik}) < deg(B_i).$$

Le polynôme E est appelé *partie entière*, le reste $F - E$ est appelé *partie polaire.*
Sur les corps $\mathbf{C}$ et $\mathbf{R}$, la connaissance des polynômes irréductibles ($deg(B_i) = 1$, éventuellement 2) permet de préciser ce résultat.

Théorème 4. *Soient $F = A/B$ un représentant irréductible d'une fraction rationnelle F sur $\mathbf{K}$*

1. *Sur $\mathbf{C}$: si $z_1, \dots, z_r$ sont les racines deux à deux distinctes de multiplicité respective $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ du dénominateur B, on a (avec unicité) :*

$$F = \frac{A}{\lambda (X - z_1)^{\alpha_1} \dots (X - z_r)^{\alpha_r}} = E + \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{\alpha_i} \frac{a_{ik}}{(X - z_i)^k} \right)$$

où E appartient à $\mathbf{C}[X]$ et les a_{ik} sont des nombres complexes.

2. Sur $\mathbf{R}$ *: si* $B = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X - x_i)^{\alpha_i} \prod_{j=1}^{s} (X^2 + p_j X + q_j)^{\beta_j}$ *est la décomposition de* B *sur* $\mathbf{R}$*, alors on a (avec unicité) :*

$$F = E + \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{\alpha_i} \frac{a_{ik}}{(X - x_i)^k} \right) + \sum_{j=1}^{s} \left(\sum_{l=1}^{\beta_j} \frac{b_{jl} X + c_{jl}}{(X^2 + p_j X + q_j)^l} \right)$$

où E *appartient à* $\mathbf{R}[X]$ *et les* a_{ik}*,* b_{jl} *et* c_{jl} *sont des nombres réels.*

Références

[Gou94] Xavier Gourdon. *Algèbre.* Les maths en tête. Ellipses, Paris, 1994.

[Mon06] Jean-Marie Monier. *Algèbre MPSI, Cours, méthodes et exercices corrigés, 4ᵉ édition.* J'intègre. Dunod, Paris, 2006.