Fractions continues et puissances

Université Claude Bernard Lyon 1
Agrégation interne de mathématiques : Analyse
Année 2017–2018

Dans tout le problème, on s'intéresse aux premières décimales des puissances de 6.

I Approche élémentaire

1° Premiers chiffres

Soient N et A des entiers non nuls.

a) Donner une expression du nombre de chiffres de N en fonction de $\log(N)$.

Solution. Écrivons $N = \sum_{k=0}^{r} d_k 10^k$ comme dans les notations de l'énoncé. Alors $1 \leqslant d_r$ et $d_k \leqslant 9$ pour tout k donc

$$10^r \leqslant N \leqslant \sum_{k=0}^{r} 9 \cdot 10^k < 10^{r+1},$$

d'où $r \leqslant \log N < r+1$, $r = \lfloor N \rfloor$ et le nombre de chiffres de N est $r+1 = \lfloor \log N \rfloor + 1$.

b) Démontrer que N commence par A si et seulement s'il existe un entier naturel k tel que

$$\log A \leqslant \log N - k < \log(A+1).$$

Vérifier que k est unique et que c'est la différence du nombre de chiffres de N et A.

Solution. Soit N un entier à $r+1$ chiffres. Supposons que N commence par $A = \overline{e_s e_{s-1} \cdots e_0}$. Alors (« ch. » abrège « chiffres ») :

$$\overline{e_s e_{s-1} \cdots e_0 \underbrace{00 \cdots 0}_{r-s \text{ ch.}}} \leqslant N \leqslant \overline{e_s e_{s-1} \cdots e_0 \underbrace{9 \cdots 9}_{r-s \text{ ch.}}},$$

c'est-à-dire ($10^{r-s} = 1\underbrace{00 \cdots 0}_{r-s \text{ ch.}}$) :

$$A \cdot 10^{r-s} \leqslant N \leqslant A \cdot 10^{r-s} + 10^{r-s} - 1,$$

ou encore : $A \cdot 10^{r-s} \leqslant N < (A+1) \cdot 10^{r-s}$. En posant $k = r-s$, on trouve par croissance stricte du logarithme : $\log A \leqslant \log N - k < \log(A+1)$.
Réciproquement, supposons qu'il existe k naturel tel que $\log A \leqslant \log N - k < \log(A+1)$. Alors $A \cdot 10^k \leqslant N < (A+1) \cdot 10^k$ et l'inégalité de droite équivaut à $N \leqslant A \cdot 10^k + 10^k - 1$. Ceci exprime que N commence par A. De plus, $A \cdot 10^k$ et $A \cdot 10^k + 10^k - 1$ ont le même nombre de chiffres, à savoir $s+1+k$, d'où $r+1 = s+1+k$ et $k = r-s$.

2° Sous-groupes de $\mathbb{R}$

Dans cette question, on montre qu'un sous groupe de $\mathbb{R}$ est soit monogène, soit dense.

Soit G un sous-groupe du groupe additif de $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$. On note $G^+ = G \cap \mathbb{R}^{+*}$.

a) Démontrer que G est dense si et seulement si 0 est un point d'accumulation de G.

Solution. Vu les définitions rappelées en préambule, si G est dense, alors 0 est un point d'accumulation. Réciproquement, supposons que 0 soit un point d'accumulation de G. Soient x et y des réels, avec $x < y$. Soit $\beta \in G \cap \left]0, y-x\right[$ et soit k l'entier tel que $k\beta \leqslant x < (k+1)\beta$, c'est-à-dire la partie entière de x/β. On a alors : $(k+1)\beta \leqslant x + \beta < y$ donc l'élément $(k+1)\beta$ de G appartient à $\left]x, y\right[$.

b) Justifier l'existence du réel $\alpha = \inf G^+$.

Solution. Comme G n'est pas réduit à $\{0\}$, il contient un élément non nul g. Si $g > 0$, alors $g \in G^+$; sinon, $-g \in G^+$. Ainsi, G^+ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et minorée par 0 : elle admet une borne inférieure.

c) Dans cette question, on suppose que $\alpha > 0$. Démontrer que G est le groupe engendré par α.

Solution. D'abord, il faut montrer que α appartient à G. Supposons au contraire que α ne soit pas dans G. Comme $3\alpha/2$ n'est pas un minorant de G^+, il existe un élément $\beta \in G^+$ tel que $\beta < 3\alpha/2$. On a nécessairement : $\alpha < \beta$ car $\alpha \notin G^+$. Mais β n'est pas un minorant de G^+ (ce serait sa borne inférieure !) donc il existe $\gamma \in \,]\alpha, \beta[$. Des inégalités $\alpha < \gamma < \beta < 3\alpha/2$ on déduit que $0 < \beta - \gamma < \alpha/2 < \alpha$. Comme G est un groupe, $\beta - \gamma$ est un élément de G^+ inférieur à α : contradiction. Ainsi, $\alpha \in G$ donc le groupe engendré par α est contenu dans G.
Inversement, soit $x \in G$ non nul. Quitte à remplacer x par $-x$ si $x < 0$, on peut supposer que $x > 0$. Soit k l'entier naturel maximal tel que $k\alpha \leqslant x$, c'est-à-dire $k = \lfloor x/\alpha \rfloor$. La maximalité de k ou la caractérisation de la partie entière donne $0 \leqslant x - k\alpha < \alpha$. Mais bien sûr, $x - k\alpha \in G$: ainsi, $x - k\alpha$ ne peut appartenir à G^+, ce qui signifie que $x = k\alpha$, ce qui entraîne que x appartient au groupe engendré par α.

d) Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$. Démontrer que G est dense.

Solution. Il suffit de montrer que 0 est un point d'accumulation de G^+, ce qui est clair par définition de la borne supérieure : comme $0 \notin G^+$, tout intervalle $]0, \varepsilon[$ (avec $\varepsilon > 0$) contient un élément de G^+.

3° Soit θ un nombre irrationnel et soit G_θ le groupe engendré par 1 et θ, c'est-à-dire le plus petit sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ qui contient 1 et θ.

a) Justifier rapidement que $G_\theta = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta$, c'est-à-dire que $G_\theta = \big\{u + v\theta,\ (u, v) \in \mathbb{Z}^2\big\}$.

Solution. Par une récurrence immédiate sur $|u| + |v|$, on vérifie que $u + v\theta \in G_\theta$ pour tout $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$. Inversement, l'ensemble $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta$ contient 1 et θ, il est stable par addition et passage à l'opposé, donc c'est un sous-groupe de $\mathbb{R}$ et il contient G_θ.

b) Démontrer que G_θ ne peut pas être engendré par un seul élément et en déduire qu'il est dense dans $\mathbb{R}$.

Solution. Supposons que $G_\theta = \mathbb{Z}\alpha$ pour un réel α. Il existe alors deux entiers (non nuls) k et ℓ tels que $1 = k\alpha$ et $\theta = \ell\alpha$, ce qui entraîne que $\theta = \ell/k$, contradiction. Vu la dichotomie démontrée dans la question précédente, c'est que G_θ est dense.

Remarques.

1. Si $\theta = p/q$ avec p et q premiers entre eux, G_θ est le groupe engendré par $1/q$.
2. Si $a, b \in \mathbb{R}^*$, $G_{a,b} = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b$ est dense SSI $b/a \notin \mathbb{Q}$.

c) Soient ε un réel strictement positif et k_0 un entier naturel. Démontrer qu'il existe un couple $(j, k) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $j + k\theta \in \,]-\varepsilon, \varepsilon[$ et $k \geqslant k_0$.

Solution. Pour k fixé, l'ensemble J_k des entiers j tels que $-\varepsilon < j + k\theta < \varepsilon$ est fini. La réunion des J_k pour $|k| \leqslant k_0$ est donc finie. Mais G privé de l'ensemble fini $\{j + k\theta,\ |k| \leqslant k_0 \text{ et } j \in J_k\}$ est encore dense. Par suite, l'intersection $G_\theta \cap \,]-\varepsilon, \varepsilon[$ contient un élément $j + k\theta$ avec $|k| \geqslant k_0$. Si $k > 0$, c'est gagné. Si $k < 0$, l'intersection contient également $-j - k\theta$ et c'est aussi gagné.

d) Soit $M_\theta = \mathbb{Z} + \mathbb{N}\theta$. Démontrer que M_θ est dense dans $\mathbb{R}$.

Solution. Soient x et y des réels tels que $x < y$. Par densité de G_θ, il existe $(j_0, k_0) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\beta = j_0 + k_0\theta \in G_\theta \cap]x, y[$. Soit alors $\varepsilon = \min(\beta - x, y - \beta)$. Soit $(j, k) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $j + k\theta \in G_\theta \cap]-\varepsilon, \varepsilon[$ et $k \geqslant |k_0|$. Alors $\gamma = j + j_0 + (k + k_0)\theta \in \mathbb{Z} + \mathbb{N}\theta$ et on a :

$$x < \beta - \varepsilon < \gamma < \beta + \varepsilon < y.$$

4° Préfixes des puissances de 6

a) Démontrer que $\log(6)$ est irrationnel.

Solution. Supposons qu'existent p et q entiers tels que $\log 6 = p/q$. [Ils sont non nuls et de même signe, on peut les supposer positifs.] On aurait alors $10^p = 6^q$, ce qui contredirait l'unicité de la factorisation dans $\mathbb{N}$.

b) En déduire que pour tout entier A, il existe une puissance de 6 qui commence par A.

Solution. Par la question 1° b), dont on reprend les notations, il existe une puissance de 6 qui commence par A si et seulement s'il existe m et k tels que

$$\log A \leqslant -k + m \log 6 < \log(A + 1).$$

C'est assuré par l'irrationnalité de $\log(6)$ et la densité de $\mathbb{Z} + \mathbb{N} \log 6$ qui en découle.

II Approche effective : fractions continues

1° Préliminaires

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'entiers telle que $a_0 \geqslant 0$ et, pour $n \geqslant 1$, $a_n > 0$. On définit deux suites $(p_n)_{n\geqslant -2}$ et $(q_n)_{n\geqslant -2}$ par :

$$\begin{cases} p_{-2} = 0 \\ q_{-2} = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} p_{-1} = 1 \\ q_{-1} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} p_0 = a_0 \\ q_0 = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}. \end{cases}$$

a) Montrer que $(q_n)_{n\geqslant 0}$ est positive et $(q_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante. Quelle est sa limite ?

Solution. On a : $q_0 = 1$, $q_1 = a_1 \geqslant q_0$, $q_2 = a_2 q_1 + q_0 > a_2 q_1$. Soit $n \geqslant 2$. Supposons savoir que $q_{n-1} > \cdots > q_1 \geqslant q_0 > 0$. Alors, comme $a_n \geqslant 1$ et $q_{n-2} \geqslant 0$, on a : $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} > q_{n-1}$, ce qui permet de conclure la récurrence. La suite d'entiers (q_n) est strictement croissante donc elle diverge vers l'infini.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $D_n = p_n q_{n+1} - p_{n+1} q_n$. Montrer que $D_n = (-1)^{n+1}$ pour tout n.

Solution. On a $D_{-2} = -1$ et $D_{-1} = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $D_{n-1} = -D_{n-2} = (-1)^n$. Alors :

$$D_n = p_n q_{n+1} - p_{n+1} q_n = p_n(a_{n+1} q_n + q_{n-1}) - (a_{n+1} p_n + p_{n-1}) q_n = -D_{n-1},$$

d'où la conclusion par récurrence.

c) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $y_n = p_n/q_n$. Montrer que les suites $(y_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ et $(y_{2n})_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes. En déduire que la suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

Solution. La question précédente donne, pour $n \geqslant 0$: $y_n - y_{n+1} = (-1)^{n+1}/(q_n q_{n+1})$. On en déduit, vu que la suite $(q_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante et positive :

— si $n = 2p$ est pair, $y_{2p} < y_{2p+1}$;

— si $n = 2p$ est pair,

$$y_{2p} - y_{2p+2} = y_{2p} - y_{2p+1} + y_{2p+1} - y_{2p+2} = -\frac{1}{q_{2p}q_{2p+2}} + \frac{1}{q_{2p+1}q_{2p+2}} = \frac{q_{2p} - q_{2p+2}}{q_{2p}q_{2p+1}q_{2p+2}} < 0;$$

— si $n = 2p - 1$ est impair,

$$y_{2p-1} - y_{2p+1} = y_{2p-1} - y_{2p} + y_{2p} - y_{2p+1} = \frac{1}{q_{2p-1}q_{2p}} - \frac{1}{q_{2p}q_{2p+1}} = \frac{q_{2p+1} - q_{2p-1}}{q_{2p-1}q_{2p}q_{2p+1}} > 0;$$

— comme $\lim_{n\to+\infty} q_n = +\infty$, on a : $\lim_{p\to+\infty}(y_{2p+1} - y_{2p}) = 0$.

Ainsi, les suites $(y_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(y_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Elles ont la même limite, si bien que la suite (y_n) est convergente.

Remarque. On a :

$$\begin{aligned}
y_0 &= a_0, \\
y_1 &= \frac{p_1}{q_1} = \frac{a_1a_0 + 1}{a_1} = a_0 + \frac{1}{a_1}, \\
y_2 &= \frac{p_2}{q_2} = \frac{a_2(a_1a_0 + 1) + a_0}{a_2a_1 + 1} = a_0 + \frac{a_2}{a_2a_1 + 1} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}},
\end{aligned}$$

et ainsi de suite pour tout n (vérifier !) :

$$y_n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}.$$

2° Fractions continues

Soit $\theta > 0$ un nombre *irrationnel*. On définit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0 = \theta$ et $a_0 = \lfloor\theta\rfloor$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \frac{1}{x_n - \lfloor x_n\rfloor} \quad \text{et} \quad a_{n+1} = \lfloor x_{n+1}\rfloor.$$

On définit alors des suites $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme dans la question 1°.

a) Montrer que les suites sont bien définie et que la suite (a_n) satisfait aux hypothèses de 1°.

Solution. Pour n entier, on note H_n l'assertion : « $x_0, \ldots, x_n$ sont bien définis et irrationnels ». L'assertion H_0 résulte des hypothèses. Soit n entier, supposons H_n vraie. Alors, x_n étant irrationnel, il est différent de sa partie entière, de sorte que x_{n+1} est bien défini, non nul et irrationnel – sinon, $x_n = \lfloor x_n\rfloor + 1/x_{n+1}$ serait rationnel.

b) Calculer explicitement la suite (a_n) pour $\theta = \sqrt{3}$.

Solution. Comme $x_0 \simeq 1{,}732$, on a $a_0 = 1$, d'où $x_1 = 1/(\sqrt{3} - 1) = (\sqrt{3} + 1)/2 \simeq 1{,}366$, $a_1 = 1$, $x_2 = 2/(\sqrt{3} - 1) = \sqrt{3} + 1 \simeq 2{,}732$, $a_2 = 2$, $x_3 = 1/(\sqrt{3} - 1) = x_1$. Partant, la suite devient périodique de période 2 et la suite (a_n) est donc : $(1; , 1, 2, \overline{1, 2}, \ldots)$.

c) Montrer que
$$\forall n \geqslant 0, \quad \theta = \frac{x_n p_{n-1} + p_{n-2}}{x_n q_{n-1} + q_{n-2}}.$$

Solution. Pour $n = 0$, l'égalité s'écrit $\theta = (1 \cdot \theta + 0)/(0 \cdot \theta + 1)$, ce qui est évident. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $\theta = p_{n-1}x_n + p_{n-2}/q_{n-1}x_n + q_{n-2}$. Alors on a :

$$\frac{x_{n+1}p_n + p_{n-1}}{x_{n+1}q_n + q_{n-1}} = \frac{\frac{p_n}{x_n - a_n} + p_{n-1}}{\frac{q_n}{x_n - a_n} + q_{n-1}} = \frac{x_n p_{n-1} + p_n - a_n p_{n-1}}{x_n q_{n-1} + q_n - a_n q_{n-1}} = \frac{p_{n-1}x_n + p_{n-2}}{q_{n-1}x_n + q_{n-2}} = \theta,$$

ce qui permet de conclure.

d) En déduire que
$$\forall n \geqslant 1, \quad \left|\theta - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| < \frac{1}{q_{n-1}q_n}$$
(noter que $x_n > a_n$), puis que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{p_n}{q_n} = \theta$.

Solution. On a :
$$\theta - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{p_{n-1}x_n + p_{n-2}}{q_{n-1}x_n + q_{n-2}} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{p_{n-2}q_{n-1} - p_{n-1}q_{n-2}}{(x_n q_{n-1} + q_{n-2})q_{n-1}} = \frac{D_{n-2}}{(x_n q_{n-1} + q_{n-2})q_{n-1}},$$
puis on remarque que $x_n q_{n-1} + q_{n-2} > a_n q_{n-1} + q_{n-2} = q_n$ et on se rappelle que $|D_{n+2}| = 1$, ce qui donne :
$$\left|\theta - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| < \frac{1}{q_{n-1}q_n}.$$

Remarques (culturelles).

— Les éléments de la suite $(y_n) = (p_n/q_n)$ construite à partir de (a_n) sont appelés les *réduites* de x. Ce sont d'excellentes approximations de x.

— Et même les meilleures : si $\left|x - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{2q^2}$, alors $\dfrac{p}{q}$ est une des réduites $\dfrac{p_n}{q_n}$ de x.

— Ce procédé est appelé *anthyphérèse*. Il est connu depuis l'Antiquité grecque (au moins) et donne lieu aux approximations connues de π : $y_1 = \frac{22}{7}$, $y_2 = \frac{333}{106}$, $y_3 = \frac{355}{113}$, etc.

— Pour $x = N/D$ rationnel, on peut appliquer le même procédé : il est intéressant de voir le lien très étroit avec l'algorithme d'Euclide appliqué au couple (N, D).

3° Soit θ un nombre irrationnel. En utilisant la question I 2° a) et les suites (p_n) et (q_n), démontrer que le groupe $G_\theta = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta$ est dense.

Solution. On considère la suite des réduites $(y_n) = (p_n/q_n)$ de θ. Soit $\varepsilon > 0$. Pour n assez grand, on a : $1/q_{n+1} < \varepsilon$, ce qui donne : $|q_n\theta - p_n| < 1/q_{n+1} < \varepsilon$ et, bien sûr, $q_n\theta - p_n$ appartient à G_θ. Cela montre que 0 est un point d'accumulation de G_θ et entraîne que G_θ est dense.

4° Un préfixe tout neuf

Soit s un entier et $A = 10^{s+1} - 1$ le nombre formé de $s + 1$ chiffres 9.

a) Justifier brièvement que $\log(1 - u) \leqslant -\dfrac{u}{\ln 10}$ pour $u \in]0, 1[$.

Solution. Par concavité du logarithme népérien, on a l'inégalité $\ln(1 - u) \leqslant -u$ pour $u \in]0, 1[$ (le graphe de ln est en-dessous de sa tangente en $(1, 0)$). Puis $\ln(1 - u)/\ln 10 \leqslant -u/\ln 10$.

b) Vérifier que l'on a, pour ℓ entier naturel :

$$-\frac{1}{q_{2\ell+2}} < q_{2\ell+1}\theta - p_{2\ell+1} < 0.$$

Solution. Pour tout entier n, on a $|\theta - y_n| \leqslant 1/(q_n q_{n+1})$. Or les suites des convergentes d'indices pairs et impairs sont alternées : pour $n = 2\ell+1$, on a $y_{2\ell+1} < \theta$ d'où :

$$-\frac{1}{q_{2\ell+1}q_{2\ell+2}} < \theta - \frac{p_{2\ell+1}}{q_{2\ell+1}} < 0, \quad \text{puis} \quad -\frac{1}{q_{2\ell+2}} < q_{2\ell+1}\theta - p_{2\ell+1} < 0.$$

c) En déduire que si $q_{2\ell+2} \geqslant 10^{s+1}\ln 10$, alors $6^{q_{2\ell+1}}$ commence par $s+1$ chiffres 9.

Solution. Commencer par $s+1$ chiffres 9, c'est commencer par $A = 10^{s+1} - 1$. D'après 1° b), pour que 6^m commence par $s+1$ chiffres 9, il faut et il suffit qu'il existe k entier tel que

$$\log(10^{s+1} - 1) \leqslant m\log 6 - k < \log 10^{s+1},$$

c'est-à-dire tel que :

$$\log(1 - 10^{-s-1}) \leqslant m\log 6 - (k+s+1) < 0.$$

(En termes informels, $m\log 6$ est très légèrement inférieur à un entier.) D'après a) et b), on a :

$$\log(1 - 10^{-s-1}) \leqslant -\frac{10^{-s-1}}{\ln 10} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{q_{2\ell+1}} < q_{2\ell+1}\log 6 - p_{2\ell+1} < 0.$$

D'où, si $q_{2\ell+2} > 10^{s+1}\ln 10$, alors $-\dfrac{10^{-s-1}}{\ln 10} \leqslant -\dfrac{1}{q_{2\ell+1}}$ et $6^{q_{2\ell+1}}$ commence par $s+1$ chiffres 9.

5° **Un préfixe quelconque**

Soit A un entier naturel non nul et soient

$$a = \frac{2\log(A) + \log(A+1)}{3} \quad \text{et} \quad b = \frac{\log(A) + 2\log(A+1)}{3}.$$

On rappelle que (p_n/q_n) la suite des réduites de $\theta = \log 6$.

a) Vérifier que pour n assez grand, on a : $aq_n < \lfloor bq_n \rfloor$.

Solution. On a $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \infty$ donc, pour n assez grand, $1 < (b-a)q_n$, d'où : $aq_n < bq_n - 1 < \lfloor bq_n \rfloor$.

b) On choisit un tel entier n. À l'aide de 1° b), montrer qu'il existe des entiers m et k tels que

$$mp_n - kq_n = \lfloor bq_n \rfloor \quad \text{et} \quad 0 < m < q_n$$

et donner un algorithme pour les trouver.

Solution. Puisque $p_n q_{n+1} - p_{n+1}q_n = (-1)^{n+1}$, les entiers p_n et q_n sont premiers entre eux. Posons $m' = (-1)^{n+1}q_{n+1}\lfloor bq_n \rfloor$ et $k' = (-1)^{n+1}p_{n+1}\lfloor bq_n \rfloor$, on a donc : $m'p_n - k'q_n = \lfloor bq_n \rfloor$. Écrivons la division euclidienne de m' par q_n : $m' = \ell q_n + m$, avec[1] $0 < m < q_n$. Alors $(m + \ell q_n)p_n - k'q_n = \lfloor bq_n \rfloor$, d'où le résultat avec le m construit à l'instant et $k = k' - \ell q_n$.

1. Il faudrait justifier que $m > 0$, i.e. que $\ell q_n = \lfloor bq_n \rfloor$ n'est pas envisageable. Je passe pour l'instant.

c) Justifier l'existence d'entiers n, m, k tels que

$$\frac{1}{q_{n+1}} < \frac{b-a}{3} \quad \text{et} \quad a < m\frac{p_n}{q_n} - k \leqslant b.$$

Solution. On commence par choisir n assez grand pour que $1/q_{n+1} < (b-a)/3$ et que $aq_n < \lfloor bq_n \rfloor$. Puis on trouve m et k comme dans la question précédente tels que $mp_n - kq_n = \lfloor bq_n \rfloor$. L'inégalité $aq_n < \lfloor bq_n \rfloor \leqslant bq_n$ donne alors : $a < m\frac{p_n}{q_n} - k \leqslant b$.

d) En déduire que l'on a alors :

$$\log A < m\theta - k < \log(A+1),$$

puis que 6^m commence par A.

Solution. On a :

$$\left|\frac{p_n}{q_n} - \theta\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} \quad \text{donc} \quad m\left|\frac{p_n}{q_n} - \theta\right| < \frac{m}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_{n+1}} < \frac{1}{q_n} < \frac{b-a}{3},$$

d'où par l'inégalité triangulaire :

$$\log A = a - \frac{b-a}{3} < m\frac{p_n}{q_n} - k - m\left|\frac{p_n}{q_n} - \theta\right| \leqslant m\theta - k \leqslant m\frac{p_n}{q_n} - k + m\left|\frac{p_n}{q_n} - \theta\right| < b + \frac{b-a}{3} = \log(A+1).$$

On sait que cela signifie que 6^m commence par A.

III Approche « statistique » : équirépartition

On dit qu'une suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $[0,1]$ est *équirépartie* si, pour tout intervalle $[a,b] \subset [0,1]$, on a :

$$\lim_{M\to+\infty} \frac{\#\big\{m \in \mathbb{N}^*, \quad 1 \leqslant m \leqslant M \text{ et } u_m \in [a,b]\big\}}{M} = b-a.$$

Sens : la proportion du temps passé par la suite dans l'intervalle $[a,b]$ du temps 1 au temps M tend vers le quotient de la longueur de $[a,b]$ sur la longueur de $[0,1]$.
Une suite $(\theta_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est *équirépartie modulo* 1 si la suite définie par $u_m = \theta_m - \lfloor \theta_m \rfloor$ pour tout m est équirépartie.
On admet provisoirement le *critère de Weyl* : les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) la suite $(\theta_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie modulo 1 ;

(ii) pour toute fonction continue par morceaux $f : [0,1] \to \mathbb{C}$,

$$\lim_{M\to+\infty} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} f\big(\theta_m - \lfloor \theta_m \rfloor\big) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\ ;$$

(iii) $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \lim_{M\to+\infty} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi k\theta_m} = 0.$

1° **Équirépartition et préfixes des puissances de** 6

a) À l'aide du critère de Weyl, démontrer que la suite $(m\theta)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie modulo 1.

Solution. On vérifie la condition (iii), ce qui est presque immédiat. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $M \in \mathbb{N}^*$, on a, vu que θ est irrationnel et $\exp(2\mathrm{i}\pi km\theta)$ ne peut pas être égal à 1 :

$$\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi km\theta} = \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi k\theta}}{M} \cdot \frac{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi k\theta M}}{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi k\theta}} \overset{M\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

puisque le deuxième facteur est borné.

b) Soit A un entier naturel non nul. Démontrer que

$$\lim_{M\to+\infty} \frac{\#\{m \leqslant M,\ 6^m \text{ commence par } A\}}{M} = \log \frac{A+1}{A}.$$

Solution. On l'a dit et répété : 6^m commence par A si et seulement s'il existe k entier tel que

$$\log(A) < m\log 6 - k < \log(A+1).$$

Comme A est entier, il n'y a pas de puissance de 10 entre A et $A+1$. Par suite, tous les réels de $]\log A, \log(A+1)[$ ont la même partie entière ℓ. Il s'agit donc de voir pour quels m il existe k tel que $m\log 6 - k - \ell$ appartient à un intervalle de longueur $\log(A+1) - \log(A)$ contenu dans $[0,1]$. En d'autres termes, pour quels m est-ce que la partie fractionnaire $m\theta - \lfloor m\log 6\rfloor$ appartient à cet intervalle ? L'équirépartition modulo 1 que l'on vient de prouver signifie que la proportion de ces entiers m tend vers la longueur de l'intervalle.

2° **Preuve du critère de Weyl**

Remarque. Posée avec si peu d'indications, cette question est très difficile.

a) Démontrer les implications faciles du critère : (ii) $\Longrightarrow$ (iii) et (ii) $\Longrightarrow$ (i).

b) À l'aide du théorème de Weierstrass rappelé ci-dessous (et qui sera vu plus tard dans l'année), démontrer l'implication (iii) $\Longrightarrow$ (ii) pour les fonctions continues, puis pour les fonctions continues par morceaux.

> Pour toute fonction f continue sur $[0,1]$ à valeurs réelles telle que $f(0) = f(1)$ et tout réel ε strictement positif, il existe un entier J et une suite finie de réels $(a_j)_{-J\leqslant j\leqslant J} \in \mathbb{R}^{2J+1}$ tels que
>
> $$\sup_{x\in[0,1]} \big|f(x) - g(x)\big| \leqslant \varepsilon, \qquad \text{où} \quad \forall x \in [0,1],\ g(x) = \sum_{j=0}^{J} a_j \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi x}.$$

c) En encadrant la fonction indicatrice d'un intervalle par des fonctions affines par morceaux et continues convenables, démontrer que (i) $\Longrightarrow$ (ii).

Solution. **Référence :** S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices de mathématiques. Oraux X-ENS. Analyse 2*, Cassini, Paris, p. 45-50 (2009).
En ligne, on pourra chercher sur le site des annales de l'UPS la première épreuve du concours Mines-Ponts MP de 1999.