Université Claude Bernard Lyon 1
Agrégation interne de Mathématiques : Analyse
Année 2017–2018

Fractions continues et puissances

Dans tout le problème, on s'intéresse aux premières décimales des puissances de 6.

NOTATIONS.

— On note log le logarithme décimal : pour x réel strictement positif, $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

— Pour tout réel x, il existe un unique entier n tel que $n \leqslant x < n+1$. Ce réel est appelé *partie entière de* x et noté $\lfloor x \rfloor$.

— Le *développement décimal* d'un entier naturel N non nul est l'unique suite finie $\mathbf{d} = (d_0, \dots, d_r) \in \{0, \dots, 9\}^{r+1}$, telle que $d_r \neq 0$ et $N = \sum_{i=0}^{r} d_i \cdot 10^i$. Le nombre de chiffres de N est $r+1$. On pourra écrire $N = \overline{d_r d_{r-1} \cdots d_1 d_0}$.

— Soient N et A deux entiers naturels non nuls, soient $\mathbf{d} = (d_0, \dots, d_r)$ et $\mathbf{e} = (e_0, \dots, e_s)$ leurs développements décimaux respectifs. On dit que N *commence par* A si $s \leqslant r$ et, pour $j \in \{0, \dots, s\}$, $d_j = e_j$. Par exemple, 1325 commence par 1, par 13, etc.

I Approche élémentaire

I

1 Premiers chiffres

com

Soient N et A des entiers non nuls. On pose

$$a = \log A \quad \text{et} \quad b = \log(A+1).$$

a) Donner une expression du nombre de chiffres de N en fonction de $\log(N)$.

Solution. Écrivons $N = \sum_{k=0}^{r} d_k 10^k$ comme dans les notations de l'énoncé. Alors $1 \leqslant d_r$ et $d_k \leqslant 9$ pour tout k donc

$$10^r \leqslant N \leqslant \sum_{k=0}^{r} 9 \cdot 10^k < 10^{r+1},$$

d'où $r \leqslant \log N < r+1$ et $r+1 = \lfloor \log N \rfloor + 1$.

comb

b) Démontrer que N commence par A si et seulement s'il existe un entier naturel k tel que

$$\log A \leqslant \log N - k < \log(A+1).$$

Vérifier que k est unique et que c'est la différence du nombre de chiffres de de N et A.

Solution. Soit N un entier à $r+1$ chiffres. Supposons que N commence par $A = \overline{e_s e_{s-1} \cdots e_0}$. Alors :

$$\overline{e_s e_{s-1} \cdots e_0 \underbrace{00 \cdots 0}_{r-s \text{ ch.}}} \leqslant N \leqslant \overline{e_s e_{s-1} \cdots e_0 \underbrace{9 \cdots 9}_{r-s \text{ ch.}}},$$

c'est-à-dire ($10^{r-s} = 1\underbrace{00 \cdots 0}_{r-s \text{ ch.}}$) :

$$A \cdot 10^{r-s} \leqslant N \leqslant A \cdot 10^{r-s} + 10^{r-s} - 1,$$

ou encore : $A \cdot 10^{r-s} \leqslant N < (A+1) \cdot 10^{r-s}$. En posant $k = r - s$, on trouve par croissance stricte du logarithme : $\log A \leqslant \log N - k < \log(A+1)$.

Réciproquement, supposons qu'il existe k naturel tel que $\log A \leqslant \log N - k < \log(A+1)$. Alors $A \cdot 10^k \leqslant N < (A+1) \cdot 10^k$ et l'inégalité de droite équivaut à $N \leqslant A \cdot 10^k + 10^k - 1$. Ceci exprime que N commence par A. De plus, $A \cdot 10^k$ et $A \cdot 10^k + 10^k - 1$ ont le même nombre de chiffre, $s+1+k$, d'où $r+1 = s+1+k$ et $k = r-s$.

2° **Sous-groupes de $\mathbb{R}$**

Soit G un sous-groupe du groupe additif de $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$. On note $G^+ = G \cap \mathbb{R}^{+*}$.

a) Démontrer que G est dense si et seulement si 0 est un point d'accumulation de G, *i.e.* il existe une suite d'éléments non nuls de G qui converge vers 0.

b) Justifier l'existence du réel $\alpha = \inf G^+$.

c) Dans cette question, on suppose que $\alpha > 0$. Démontrer que G est le groupe engendré par α.
Pour $x \in G$ non nul, vérifier que $|x| \in G$ et considérer $\big\{k \in \mathbb{Z},\ k\alpha \leqslant |x|\big\}$.

d) Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.
Montrer pour tout réel $\varepsilon > 0$, le groupe G contient un élément dans $]0, \varepsilon[$.
En déduire que tout intervalle $]x, y[$ contient un élément de G.
On pourra choisir un élément $\beta \in G \cap]0, y - x[$ et considérer $\{k \in \mathbb{Z},\ k\beta \leqslant x\}$.

3° Soit θ un nombre irrationnel et soit G_θ le groupe engendré par 1 et θ.

a) Justifier rapidement que $G_\theta = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta$, c'est-à-dire que $G_\theta = \big\{u + v\theta,\ (u, v) \in \mathbb{Z}^2\big\}$.

b) Démontrer que G_θ est dense dans $\mathbb{R}$.

c) Soient ε un réel strictement positif et k_0 un entier naturel. Démontrer qu'il existe un couple $(j, k) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $j + k\theta \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ et $k \geqslant k_0$.
On pourra justifier que pour k fixé, l'intersection $\{j + k\theta,\ j \in \mathbb{Z}\} \cap]-\varepsilon, \varepsilon[$ est finie.

d) Soit $M_\theta = \mathbb{Z} + \mathbb{N}\theta$. Démontrer que M_θ est dense dans $\mathbb{R}$.

4° **Préfixes des puissances de 6**

a) Démontrer que $\log(6)$ est irrationnel.

Solution. Supposons qu'existent p et q entiers tels que $\log 6 = p/q$. [Ils sont non nuls et de même signe, on peut les supposer positifs.] On aurait alors $10^p = 6^q$, ce qui contredirait l'unicité de la factorisation dans $\mathbb{N}$.

b) En déduire que pour tout entier A, il existe une puissance de 6 qui commence par A.

Solution. Par la question 1° b), dont on reprend les notations, il existe une puissance de 6 qui commence par A si et seulement s'il existe m et k tels que

$$\log A \leqslant -k + m \log 6 < \log(A + 1).$$

C'est assuré par l'irrationnalité de $\log(6)$ et la densité de $\mathbb{Z} + \mathbb{N} \log 6$ qui en découle.

II Approche effective : fractions continues

1° Préliminaires

Soit $(a_n)_{n \geqslant 0}$ une suite d'entiers telle que $a_0 \geqslant 0$ et, pour $n \geqslant 1$, $a_n > 0$. On définit deux suites $(p_n)_{n \geqslant -1}$ et $(q_n)_{n \geqslant -1}$ par :

$$\begin{cases} p_{-2} = 0 \\ q_{-1} = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} p_{-1} = 1 \\ q_{-1} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} p_0 = a_0 \\ q_0 = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}. \end{cases}$$

a) Montrer que $(q_n)_{n \geqslant 0}$ est positive et $(q_n)_{n \geqslant 1}$ est strictement croissante. Quelle est sa limite ?

Solution. On a : $q_0 = 1$, $q_1 = a_1 \geqslant q_0$, $q_2 = a_2 q_1 + q_0 > a_2 q_1$. Soit $n \geqslant 2$. Supposons savoir que $q_{n-1} > \cdots > q_1 \geqslant q_0 > 0$. Alors, comme $a_n \geqslant 1$ et $q_{n-2} \geqslant 0$, on a : $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} > q_{n-1}$, ce qui permet de conclure la récurrence.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $D_n = p_n q_{n+1} - p_{n+1} q_n$. Montrer que $D_n = (-1)^{n+1}$ pour tout n.

Solution. On a $D_{-2} = -1$ et $D_{-1} = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $D_{n-1} = -D_{n-2} = (-1)^n$. Alors :

$$D_n = p_n q_{n+1} - p_{n+1} q_n = p_n(a_{n+1} q_n + q_{n-1}) - (a_{n+1} p_n + p_{n-1}) q_n = -D_{n-1},$$

d'où la conclusion par récurrence.

c) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $y_n = p_n/q_n$. Montrer que les suites $(y_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ et $(y_{2n})_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes. En déduire que la suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

Solution. La question précédente donne, pour $n \geqslant 0$: $y_n - y_{n+1} = (-1)^{n+1}/(q_n q_{n+1})$. On en déduit, vu que la suite $(q_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante et positive :

— si $n = 2p$ est pair, $y_{2p} < y_{2p+1}$;

— si $n = 2p$ est pair,

$$y_{2p} - y_{2p+2} = y_{2p} - y_{2p+1} + y_{2p+1} - y_{2p+2} = -\frac{1}{q_{2p}q_{2p+2}} + \frac{1}{q_{2p+1}q_{2p+2}} = \frac{q_{2p} - q_{2p+2}}{q_{2p}q_{2p+1}q_{2p+2}} < 0;$$

— si $n = 2p-1$ est impair,

$$y_{2p-1} - y_{2p+1} = y_{2p-1} - y_{2p} + y_{2p} - y_{2p+1} = \frac{1}{q_{2p-1}q_{2p}} - \frac{1}{q_{2p}q_{2p+1}} = \frac{q_{2p+1} - q_{2p-1}}{q_{2p-1}q_{2p}q_{2p+1}} > 0.$$

Ces inégalités entraînent que les sous-suites des termes pairs et impairs sont adjacentes. Elles convergent vers la même limite, ce qui entraîne que la suite (y_n) est convergente.

2° PF **Fractions continues**

Soit $\theta > 0$ un nombre *irrationnel*. On définit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0 = \theta$ et $a_0 = \lfloor\theta\rfloor$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \frac{1}{x_n - \lfloor x_n \rfloor} \quad \text{et} \quad a_{n+1} = \lfloor x_{n+1} \rfloor.$$

On définit alors des suites $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme dans la question prel 1°.

a) Montrer que les suites sont bien définie et que la suite (a_n) satisfait aux hypothèses de prel 1°.

Solution. Pour n entier, on note H_n l'assertion : « $x_0, \dots, x_n$ sont bien définis et irrationnels ». L'assertion H_0 résulte des hypothèses. Soit n entier, supposons H_n vraie. Alors, x_n étant irrationnel, il est différent de sa partie entière, de sorte que x_{n+1} est bien défini, non nul et irrationnel – sinon, $x_n = \lfloor x_n \rfloor + 1/x_{n+1}$ serait rationnel.

b) Calculer explicitement la suite (a_n) pour $\theta = \sqrt{3}$.

Solution. Comme $x_0 \simeq 1{,}732$, on a $a_0 = 1$, d'où $x_1 = 1/(\sqrt{3}-1) = (\sqrt{3}+1)/2 \simeq 1{,}366$, $a_1 = 1$, $x_2 = 2/(\sqrt{3}-1) = \sqrt{3}+1 \simeq 2{,}732$, $a_2 = 2$, $x_3 = 1/(\sqrt{3}-1) = x_1$. Partant, la suite devient périodique de période 2 et la suite (a_n) est donc : $(1;, 1, 2, \overline{1, 2}, \dots)$.

c) Montrer que

$$\forall n \geqslant 0, \quad \theta = \frac{x_n p_{n-1} + p_{n-2}}{x_n q_{n-1} + q_{n-2}}.$$

Solution. Pour $n = 0$, l'égalité s'écrit $\theta = (1\cdot\theta + 0)/(0\cdot\theta + 1)$, ce qui est évident. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $\theta = p_{n-1}x_n + p_{n-2}/q_{n-1}x_n + q_{n-2}$. Alors on a :

$$\frac{x_{n+1}p_n + p_{n-1}}{x_{n+1}q_n + q_{n-1}} = \frac{\frac{p_n}{x_n - a_n} + p_{n-1}}{\frac{q_n}{x_n - a_n} + q_{n-1}} = \frac{x_n p_{n-1} + p_n - a_n p_{n-1}}{x_n q_{n-1} + q_n - a_n q_{n-1}} = \frac{p_{n-1}x_n + p_{n-2}}{q_{n-1}x_n + q_{n-2}} = \theta,$$

ce qui permet de conclure.

tres_bon **d)** En déduire que

$$\forall n \geqslant 1, \quad \left|\theta - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| < \frac{1}{q_{n-1}q_n}$$

(noter que $x_n > a_n$), puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{p_n}{q_n} = \theta$.

Solution. On a :

$$\theta - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{p_{n-1}x_n + p_{n-2}}{q_{n-1}x_n + q_{n-2}} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{p_{n-2}q_{n-1} - p_{n-1}q_{n-2}}{(x_n q_{n-1} + q_{n-2})q_{n-1}} = \frac{D_{n-2}}{(x_n q_{n-1} + q_{n-2})q_{n-1}},$$

puis on remarque que $x_n q_{n-1} + q_{n-2} > a_n q_{n-1} + q_{n-2} = q_n$ et on se rappelle que $|D_{n+2}| = 1$, ce qui donne :

$$\left|\theta - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| < \frac{1}{q_{n-1}q_n}.$$

Remarques (culturelles).

- Les éléments de la suite $(y_n) = (p_n/q_n)$ construite à partir de (a_n) sont appelés les *réduites* de x. Ce sont d'excellentes approximations de x.
- Et même les meilleures : si $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$, alors $\frac{p}{q}$ est une des réduites $\frac{p_n}{q_n}$ de x.
- Ce procédé est appelé *anthyphérèse*. Il est connu depuis l'Antiquité grecque (au moins) et donne lieu aux approximations connues de π : $y_1 = \frac{22}{7}$, $y_2 = \frac{333}{106}$, $y_3 = \frac{355}{113}$, etc.
- Pour $x = N/D$ rationnel, on peut appliquer le même procédé : il est intéressant de voir le lien très étroit avec l'algorithme d'Euclide appliqué au couple (N, D).

3° Soit θ un nombre irrationnel. En utilisant la question I 2° a) et les suites (p_n) et (q_n), démontrer que le groupe $G_\theta = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta$ est dense.

Solution. On considère la suite des réduites $(y_n) = (p_n/q_n)$ de θ. Soit $\varepsilon > 0$. Pour n assez grand, on a : $1/q_{n+1} < \varepsilon$, ce qui donne : $|q_n\theta - p_n| < 1/q_{n+1} < \varepsilon$ et, bien sûr, $q_n\theta - p_n$ appartient à G_θ. Cela montre que 0 est un point d'accumulation de G_θ et entraîne que G_θ est dense.

NOTATION. Désormais, on pose $\theta = \log 6$ et on note $(p_n/q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des réduites de θ.

4° **Un préfixe tout neuf**

Soit s un entier et $A = 10^{s+1} - 1$ le nombre formé de $s+1$ chiffres 9.

conva **a)** Justifier brièvement que $\log(1-u) \leqslant -\frac{u}{\ln 10}$ pour $u \in]0,1[$.

Solution. Par concavité du logarithme népérien, on a l'inégalité $\ln(1-u) \leqslant -u$ pour $u \in]0,1[$ (le graphe de ln est en-dessous de sa tangente en $(1,0)$). Puis $\ln(1-u)/\ln 10 \leqslant -u/\ln 10$.

convb **b)** Vérifier que l'on a, pour ℓ entier naturel :

$$-\frac{1}{q_{2\ell+2}} < q_{2\ell+1}\theta - p_{2\ell+1} < 0.$$

Solution. Pour tout entier n, on a $|\theta - y_n| \leqslant 1/(q_n q_{n+1})$. Or les suites des convergentes d'indices pairs et impairs sont alternées : pour $n = 2\ell+1$, on a $y_{2\ell+1} < \theta$ d'où :

$$-\frac{1}{q_{2\ell+1}q_{2\ell+2}} < \theta - \frac{p_{2\ell+1}}{q_{2\ell+1}} < 0, \quad \text{puis} \quad -\frac{1}{q_{2\ell+2}} < q_{2\ell+1}\theta - p_{2\ell+1} < 0.$$

c) En déduire que si $q_{2\ell+2} \geqslant 10^{s+1}\ln 10$, alors $6^{q_{2\ell+1}}$ commence par $s+1$ chiffres 9.

Solution. Commencer par $s+1$ chiffres 9, c'est commencer par $A = 10^{s+1} - 1$. D'après 1° b), pour que 6^m commence par $s+1$ chiffres 9, il faut et il suffit qu'il existe k entier tel que

$$\log(10^{s+1} - 1) \leqslant m\log 6 - k < \log 10^{s+1},$$

c'est-à-dire tel que :

$$\log(1 - 10^{-s-1}) \leqslant m\log 6 - (k+s+1) < 0.$$

(En termes informels, $m \log 6$ est très légèrement inférieur à un entier.) D'après conva a) et convb b), on a :

$$\log(1 - 10^{-s-1}) \leqslant -\frac{10^{-s-1}}{\ln 10} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{q_{2\ell+1}} < q_{2\ell+1} \log 6 - p_{2\ell+1} < 0.$$

D'où, si $q_{2\ell+2} > 10^{s+1} \ln 10$, alors $-\dfrac{10^{-s-1}}{\ln 10} \leqslant -\dfrac{1}{q_{2\ell+1}}$ et $6^{q_{2\ell+1}}$ commence par $s+1$ chiffres 9.

5° Un préfixe quelconque

Soit A un entier naturel non nul et soient

$$a = \frac{2\log(A) + \log(A+1)}{3} \quad \text{et} \quad b = \frac{\log(A) + 2\log(A+1)}{3}.$$

On rappelle que (p_n/q_n) la suite des réduites de $\theta = \log 6$.

a) Vérifier que pour n assez grand, on a : $aq_n < \lfloor bq_n \rfloor$.

b) On choisit un tel entier n. À l'aide de premiers-entre-eux 1° b), montrer qu'il existe des entiers m et k tels que

$$mp_n - kq_n = \lfloor bq_n \rfloor \quad \text{et} \quad 0 < m < q_n$$

et donner un algorithme pour les trouver.

c) Justifier l'existence d'entiers n, m, k tels que

$$a < m\frac{p_n}{q_n} - k \leqslant b \quad \text{et} \quad \frac{1}{q_{n+1}} < \frac{b-a}{3}.$$

d) En déduire que l'on a alors :

$$\log A < m\theta - k < \log(A+1),$$

puis que 6^m commence par A.

III Approche « statistique » : équirépartition

On admet le théorème de Weierstrass : pour toute fonction f continue sur $[0,1]$ à valeurs réelles et tout réel ε strictement positif, il existe un entier J et deux suites finies de réels $(a_j)_{0\leqslant j\leqslant J} \in \mathbb{R}^{J+1}$ et $(b_j)_{1\leqslant j\leqslant J}$ tels que

$$\sup_{x\in[0,1]} \big|f(x) - g(x)\big| \leqslant \varepsilon, \qquad \text{où} \quad \forall x \in [0,1],\ g(x) = \sum_{j=0}^{J} a_j \cos(jx) + \sum_{j=1}^{J} b_j \sin(jx).$$

L'objectif est de démontrer le *critère d'équirépartition de Weyl.*