Université Claude Bernard–Lyon I
Agrégation interne de Mathématiques : Oral 1
Année 2010–2011

C) Limite inférieure d'une suite Une motivation pour cette notion tombée des programmes de concours : le lemme de Fatou en intégration (théorie de Lebesgue), qui affirme l'inégalité :

$$\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n.$$

C'est une étape classique pour déduire le théorème de convergence dominée du théorème de convergence monotone.

12° **Existence de m_N**

Dire que u est bornée, c'est dire que $T_0(u)$ est une partie bornée. A fortiori, pour tout entier N, $T_N(u)$ est bornée – mais pas vide. Par le théorème de la borne supérieure, $m_N(u)$ est bien définie.

13° **Définition de la limite inférieure**

a) Idée. *Les seules suites dont on sait prouver la convergence à mains nues sont les suites monotones bornées.*
Soit $N \in \mathbb{N}$. On a : $T_{N+1}(u) \subset T_N(u)$. Par suite, si un réel M minore $T_N(u)$, il minore $T_{N+1}(u)$: c'est le cas de $M = m_N(u)$. Par maximalité de la borne inférieure de $T_{N+1}(u)$, on a donc : $m_{N+1}(u) \geq m_N(u)$. La suite $(m_N(u))$ est bornée puisque u l'est (détails dans la question suivante), donc elle converge.
b) De l'inégalité $\inf u \leq x \leq \sup u$, valable pour tout $x \in T_0(u)$, on déduit : $\inf u \leq m_N(u) \leq \sup u$ pour tout entier N. Par le théorème des gendarmes, il vient : $\inf u \leq \liminf_{n\to+\infty} u_n \leq \sup u$.

14° **La limite inférieure comme valeur d'adhérence**

Idée. *La suite (m_N) se rapproche de sa limite et m_N étant une borne inférieure, elle est proche d'un des termes de u.*
Soit $m = \liminf_{n\to+\infty} u_n$ et soit $\varepsilon > 0$. Il existe N_0 tel que pour $N \geq N_0$, on ait : $|m_N - m| \leq \varepsilon$. Or, $m_{N_0} = \inf T_{N_0}(u)$, si bien que pour $x \in T_{N_0}(u)$ convenable, on a : $|x - m_{n_0}| \leq \varepsilon$; autrement dit, pour $N \geq N_0$ convenable, on a : $|u_N - m_{N_0}| \leq \varepsilon$. Par suite : $|u_N - m| \leq 2\varepsilon$. C'est gagné.

15° **Position de la limite inférieure par rapport aux valeurs d'adhérences**

But. *Montrer que la limite inférieure est la plus petite valeur d'adhérence.*
Par hypothèse, on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall N_0 \in \mathbb{N},\ \exists N \geq N_0, \quad |u_N - \ell| \leq \varepsilon.$$

On en tire immédiatement :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall N_0 \in \mathbb{N},\ \exists N \geq N_0, \quad u_N \leq \ell + \varepsilon.$$

(Cela signifie que $\ell + \varepsilon$ n'est pas un minorant.) Mais comme la borne inférieure est un minorant, il vient :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall N_0 \in \mathbb{N}, \quad m_{N_0} \leq \ell + \varepsilon.$$

Ainsi, par passage à la limite :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{N\to+\infty} m_N \leq \ell + \varepsilon.$$

Cela signifie que l'on a : $\liminf_{n\to+\infty} u_n \leq \ell$.
On vient de montrer que la limite inférieure est plus petite que toute valeur d'adhérence, *i.e.* qu'elle minore $V(u)$; mais elle appartient à $V(u)$! Par suite, $V(u)$ admet un élément minimal et c'est $\liminf_{n\to+\infty} u_n = \min V(u) = \inf V(u)$.

16° **Comparaison des limites inférieures de deux suites**

Idée. *Pas de surprise à attendre mais il faut dérouler la définition.*
Pour m réel et n entier, on a : si $m \leq u_n$, alors $m \leq v_n$. Par suite, pour tout entier N, si m minore $T_N(u)$, alors m minore $T_N(v)$: c'est le cas de $m_N(u) = \inf T_N(u)$. Ainsi, $m_N(u) \leq v_n$ pour tout N et tout $n \geq N$. Par maximalité de $\inf T_N(v)$ parmi les minorants de $T_N(v)$, il vient : $m_N(u) \leq m_N(v) = \inf T_N(v)$. Puis, par passage à la limite : $\liminf u \leq \liminf v$.

17° **Limite inférieure d'une somme et somme des limites inférieures**

Pour voir le sens de l'inégalité, on commence par exhiber l'exemple de la fin de la question. On prend $u_n = (-1)^n$ et $v_n = (-1)^{n+1}$ pour tout n. Alors : $\liminf u = -1 = \liminf v$ et $u_n + v_n = 0$ pour tout n, ce qui fournit bien un exemple.
Montrons donc que $\liminf u + \liminf v \leq \liminf(u+v)$. Soit $N \in \mathbb{N}$. On note $m_N(u)$, $m_N(v)$ et $m_N(u+v)$ ce qu'on imagine. Fixons $n \geq N$. On a : $m_N(u) \leq u_n$ et $m_N(v) \leq v_n$, donc : $m_N(u) + m_N(v) \leq u_n + v_n$. Par maximalité de la borne inférieure, il vient : $m_N(u) + m_N(v) \leq m_N(u+v)$. L'inégalité voulue résulte d'un passage à la limite.

D) Connexité de l'ensembles des valeurs d'adhérence des suites à évolution lente

18° **Un exemple de suite à évolution lente**

Dans $\mathbb{R}$, on pense à une série divergente dont le terme général tend vers 0, par exemple : $u_n = \sum_{k=0}^{n} 1/(k+1)$ pour tout n. Dans E quelconque, on fixe un élément x non nul de E, on peut prendre $u_n x$.

19° **Reformulation de la connexité de $V(u)$**

Idée. *Supposer la non-connexité, cela donne deux ouverts disjoints qui recouvrent $V(u)$. Mais ils sont alors aussi fermés, donc compacts car tout se passe dans un compact.*
L'hypothèse signifie qu'il existe deux ouverts relatifs Ω_1 et Ω_2 de $V(u)$ non vides tels que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = V(u)$. « Ouvert relatif » signifie qu'il existe un ouvert Ω'_i de E tel que $\Omega_i = V(u) \cap \Omega'_i$ $(i = 1, 2)$.
Notons alors $K_i = (E \setminus \Omega'_i) \cap V(u)$ $(i = 1, 2)$. Comme $E \setminus \Omega'_i$ est fermé et $V(u)$ fermé borné, K_i est compact. Mais on a : $K_1 = V(u) \setminus \Omega'_1 = V(u) \setminus \Omega_1 = \Omega_2$ et $K_2 = \Omega_1$. C'est gagné.

20° **Distance entre les compacts**

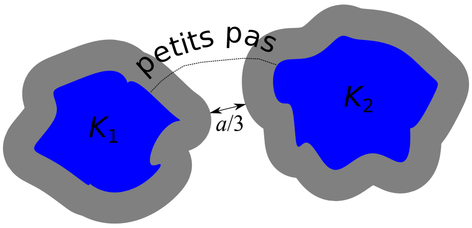
Par définition, la distance entre K_1 et K_2 est $\inf_{(x_1,x_2)\in K} f(x_1, x_2)$, où K est le compact $K_1 \times K_2$ et f est la fonction continue $f : K \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto ||x_1 - x_2||$. Or, c'est un fait général : une fonction réelle continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes. Si la distance entre K_1 et K_2 était nulle, on aurait un point $(x_1, x_2) \in K_1 \times K_2$ tel que $||x_1 - x_2|| = 0$, c'est-à-dire $x_1 = x_2$, d'où on tirerait l'absurdité : $x_1 \in K_1 \cap K_2$.

21° **Un compact**

Bien sûr, Ω_1 et Ω_2 sont ouverts (ce sont des boules ouvertes), donc leur réunion aussi. Puis, $E \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$ est fermé, et $K = \overline{\mathcal{B}(0, M)} \cap E \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$ l'est aussi. Comme K est borné, il est compact.

22° **Absurdité de l'hypothèse initiale**

Idée. *Comme K_1 et K_2 sont formés de valeurs d'adhérence, on va passer une infinité de fois dans Ω_1 et Ω_2 (en gris) ; à partir d'un certain rang, on passe de l'un à l'autre par « petits pas », de taille $< a/3$: on passe obligatoirement par K entre les deux.*



Soit $\ell_1 \in K_1$, $\ell_2 \in K_2$. Soit n_0 tel que pour $n \geq n_0$, on ait : $||u_{n+1} - u_n|| \leq a/3$. Il suffit de montrer que pour tout $N \geq n_0$, il existe $n \geq N$ tel que $u_n \in K$.
Soit donc $N \geq n_0$. Comme ℓ_1 et ℓ_2 sont des valeurs d'adhérence,, il existe n_1 et n_2 supérieurs à N tels que $||u_{n_1} - \ell_1|| \leq a/3$ et $||u_{n_2} - \ell_2|| \leq a/3$. En particulier, on a : $u_{n_i} \in \Omega_i$ $(i = 1, 2)$. Montrons qu'un terme de la suite d'indice compris entre n_1 et n_2 appartient à K. Soit en effet :

$$n'_1 = \max\{p : \; u_{n_1}, \ldots, u_p \in \Omega_1\}, \quad n'_2 = \min\{q : \; u_q, u_{q+1}, \ldots, u_{n_2} \in \Omega_1\}.$$

Alors, on a par inégalité triangulaire : $||u_{n'_2} - u_{n'_1}|| \geq a/3$. [En effet, $u_{n'_i} \in \Omega_i$ donc $||x_i - u_{n'_i}|| < a/3$ pour $x_i \in K_i$ convenable, si bien que l'on a :

$$a \leq ||x_2 - x_1|| \leq ||x_2 - u_{n'_2}|| + ||u_{n'_2} - u_{n'_1}|| + ||u_{n'_1} - x_1|| < \frac{a}{3} + ||u_{n'_2} - u_{n'_1}|| + \frac{a}{3}.]$$

Par suite, on a : $n'_2 > n'_1 + 1$ (car $||u_{n'_1+1} - u_{n'_1}|| \leq a/3$). Par minimalité de n'_2, on a : $u_{n'_1+1} \notin \Omega_2$. D'autre part, par maximalité de n'_1, $u_{n'_1+1} \notin \Omega_1$. On en déduit : $u_{n'_1+1} \in K$ comme annoncé.

À présent, l'existence d'une suite extraite de u à valeurs dans K entraîne l'existence d'une valeur d'adhérence dans K par le théorème de Bolzano-Weierstrass, ce qui contredit $K_1 \cup K_2 = V(u)$.

I Quelques suites itératives

23° **Invariance de $V(u)$ par f**

Soit $x \in V(u)$: il existe une suite extraite $(u_{\phi(n)})$ qui converge vers x. Alors, la suite $(u_{\phi(n)+1}) = (f(u_{\phi(n)}))$ converge vers $f(x)$ par continuité de f, et c'est une suite extraite de u. Donc $f(x) \in V(u)$.
Inversement, soit $x \in V(u)$. Soit $(u_{\phi(n)})$ une suite extraite qui converge vers x. On écrit pour tout n : $u_{\phi(n)} = f(u_{\phi(n)-1})$. Certes, la suite $(u_{\phi(n)-1})$ ne converge pas, mais elle est à valeurs dans le compact K, donc elle admet une sous-suite convergente $(u_{\phi(n_k)-1})_{k\in\mathbb{N}}$, dont la limite est une valeur d'adhérence ℓ de u. Mézalor, la suite $(f(u_{\phi(n_k} - 1) = (u_{\phi(n_k)})$ est extraite d'une suite convergent vers x, donc elle converge vers x ; d'autre part, par continuité de f, elle converge vers $f(\ell)$. Ainsi, on a : $x = f(\ell)$, si bien que $V(u) \subset f(V(u))$.

Remarque. La fonction f s'appelle parfois « fonction tente » (observer sa courbe !). Son point fixe non nul est répulsif, si bien que les suites récurrentes qu'elle définit peuvent être compliquées : en fait, elle forme un système dynamique *chaotique*, voir par exemple `http://www.mat.ulaval.ca/fileadmin/Cours/MAT-19519/Notes.../Chaos.pdf`.

24° **Valeurs (aux) rationnels**

Soit $x \in [0, 1]$. Si $x \in [0, 1/2]$ (resp. $x \in [1/2, 1]$), alors $x \in \mathbb{Q}$ SSI $2x \in \mathbb{Q}$ (resp. $2(1 - x) \in \mathbb{Q}$) SSI $f(x) \in \mathbb{Q}$.

25° **Périodicité lorsque le terme initial est rationnel**

a) On procède évidemment par récurrence. Pour $n = 0$, on prend $h_0 = a$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe $h_n \in \mathbb{N}$, $h_n \leq b$ tel que $u_n = h_n/b$. De deux choses l'une.
Soit $u_n \leq 1/2$, alors $h_n \leq b/2$. Alors $f(u_n) = 2h_n/b$ et on peut prendre $h_{n+1} = 2h_n$.
Soit $u_n > 1/2$, c'est-à-dire $b \geq h_n > b/2$. Alors : $f(u_n) = 2(1 - h_n/b) = 2(b - h_n)/b$. Or, $2(b - h_n) \leq b$ SSI $2h_n \geq b$, ce qui est vrai. Par suite, $h_{n+1} = 2(b - h_n)$ convient.
On peut conclure.
b) Par le principe des tiroires, la suite (h_n), qui est à valeurs dans $\{0, \ldots, b - 1\}$, n'est pas injective : il existe deux entiers n_0 et $p > 1$ tels que $h_{n_0} = h_{n_0+p}$, si bien que $u_{n_0} = u_{n_0+p}$. Mais pour tout indice n, u_{n+1} ne dépend que de u_n, on en déduit par récurrence que $u_n = u_{n+p}$ pour tout $n \geq n_0$.

26° **Suites périodiques à partir d'un certain rang**

a) On procède par récurrence. Pour $n = 0$, on prend $a = 1$ et $b = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $f^n(x) = a_n x + b_n$ (où x a été fixé). De deux choses l'une. Si $x \leq 1/2$, on a : $f^{n+1}(x) = 2a_n x + 2b_n$ donc $a_{n+1} = 2a_n$ et $b_{n+1} = 2b_n$ conviennent. Si $x > 1/2$, alors $f^{n+1}(x) = -2a_n x + 2 - 2b_n$ donc $a_{n+1} = -2a_n$ et $b_{n+1} = 2 - 2b_n$ conviennent. On peut conclure.
b) Supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $u_{N+p} = u_N$. Prenons $x = u_0$ dans la question précédente. On a : $a_{N+p}x + b_{N+p} = a_N x + b_N$. Dans la question précédente, on a vu qu'on pouvait supposer que $|a_{n+1}| > |a_n|$ pour tout n, de sorte que la suite (a_n) est injective. Par suite, $a_{N+p} - a_N \neq 0$ et on peut écrire : $u_0 = x = (b_N - b_{N+p})/(a_{N+p} - a_N) \in \mathbb{Q}$.

27° **Heuristique.** *Tant que k est « petit », c'est-à-dire tant qu'on n'a pas atteint $1/2$, appliquer f, c'est multiplier par 2. Alors, $u_k = 2^{k+1}/(1 + 2^p)$. La condition est donc :*

$$\frac{2^{k+1}}{1+2^p} \leq \frac{1}{2} \iff 2^{k+2} \leq 1 + 2^p \iff 2^{k+2} \leq 2^p \iff k \leq p - 2.$$

NB : L'exemple $p = 2$ peut servir à régler ou contrôler les indices.
Si $p = 1$, on a : $u_0 = 2/3$, $u_1 = 2/3$, etc.
On suppose désormais que $p \geq 2$. Montrons par récurrence finie que pour $k \leq p - 1$, on a : $u_k = 2^{k+1}/(1 + 2^p)$. Pour $k = 0$, l'égalité est vraie. Soit $k \leq p - 2$, on suppose que $u_k = 2^{k+1}/(1 + 2^p)$. Puisque $k \leq p - 2$, on a : $2^{k+2} \leq 2^p < 1 + 2^p$ donc $u_k < 1/2$. Par suite : $u_{k+1} = 2u_k = 2^{k+2}/(1 + 2^p)$.
On a en revanche :

$$u_{p-1} = \frac{2^p}{1+2^p} > \frac{1}{2}, \quad \text{d'où : } u_p = 2\left(1 - \frac{2^p}{1+2^p}\right) = 2\frac{1 + 2^p - 2^p}{1+2^p} = u_0.$$

On voit ainsi que u est périodique de période p.
a) On vient de montrer que $T_0(u) = \{2^k/(1 + 2^p),\ 1 \leq k \leq p\}$: c'est un ensemble discret, si bien que $V(u) \subset T_0(u)$. De plus, pour k compris entre 1 et p, la suite $(u_{k+pn})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, donc $u_k \in V(u)$. En d'autres termes : $V(u) = T_0(u)$.

II Force d'un point par rapport à une suite

28° **Bornitude et bravitude**

D'évidence, la suite $H_m(x, u, \varepsilon)$ est comprise entre 0 et 1.

29° **Une limite à droite**

Idée. *Les seules fonctions pour lesquelles on sait montrer l'existence d'une limite à mains nues sont les fonctions monotones bornées.*

Soit $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. Alors, pour m entier et $n \in [\![0, m-1]\!]$, on a :

$$|u_n - x| < \varepsilon' \implies |u_n - x| < \varepsilon.$$

Par suite, pour tout m, on a :

$$H_m(x, u, \varepsilon') \leq H_m(x, u, \varepsilon).$$

Par la question 16, on en déduit : $H(x, u, \varepsilon') \leq H(x, y, \varepsilon)$.
Lorsque x et u sont fixés, la fonction $H(x, u, \cdot)$ est décroissant et minorée par 0, donc elle admet une limite $F(x, u)$ à droite en 0.

30° **Bornitude et ennuitude**

Par construction, on a : $0 \leq H_m(x, u, \varepsilon) \leq 1$ pour toutes les valeurs des variables. Par passage à la limite inférieure (question 16 ou 13(b)), il vient : $0 \leq H(x, u, \varepsilon) \leq 1$ tout le temps. Par passage à la limite à droite en 0, il vient : $0 \leq F(x, u) \leq 1$.

31° **Majoritudes**

a) Idée. *On ne peut pas être au four et au moulin ! Les indices n pour lesquels u_n est proche des différents x_k sont dans des parties disjointes.*
Soit $\varepsilon < \min\{|x_k - x_\ell|,\ k \neq \ell\}/18$. Pour $m \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, p]\!]$, soit $I_{m,k}$ l'ensemble des $n \in [\![0, m-1]\!]$ tels que $|u_n - x_k| < \varepsilon$. Par l'hypothèse sur ε et l'inégalité triangulaire, les parties $I_{m,k}$ de $[\![0, m-1]\!]$ sont deux à deux disjointes : en effet, si $n \in I_{m,k} \cap I_{m,\ell}$, alors

$$|x_k - x_\ell| \leq |u_n - x_k| + |u_n - x_\ell| \leq 2\varepsilon,$$

donc $k = \ell$. Par suite, on a :

$$\sum_{k=0}^{p} H_m(x, u, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{p} \frac{\operatorname{card} I_{m,k}}{m} \leq \frac{\operatorname{card}[\![0, m-1]\!]}{m} = 1.$$

Par passage à la limite inférieure, il vient : $\sum_{k=0}^{p} H(x_k, u, \varepsilon) \leq 1$ pour ε assez petit, d'où par passage à la limite en 0, enfin : $\sum_{k=0}^{p} F(x_k, u) \leq 1$.
b) La série $\sum F(x_k, u)$ est positive et ses sommes partielles sont bornées par 1 donc elle converge et sa somme est inférieure ou égale à 1.

32° **Cas de convergitude**

a) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$, on ait : $|u_n - \ell| < \varepsilon$. Pour $m \geq n_0$, il y a $m - n_0 - 1$ entiers entre n_0 et m , donc :

$$H_m(\ell, u, \varepsilon) \geq \frac{m - n_0 - 1}{m}.$$

Par passage à la limite inférieure, on en déduit (question 16) :

$$H(\ell, u, \varepsilon) \geq \liminf_{m \to +\infty} \frac{m - n_0 - 1}{m} = 1.$$

Par passage à la limite en 0, il vient : $F(\ell, u) \geq 1$, puis l'égalité $F(\ell, u) = 1$ avec la question 30.
b) Soit $x \neq \ell$. On a par la question 31(b) : $F(x, u) + F(\ell, u) \leq 1$; par la question (a) : $F(u, \ell) = 1$ et par la question 30 : $F(x, u) \geq 0$. Il vient : $F(x, u) = 0$.

33° **Force positive et adhération**

Idée. *Si la force d'un point est positive, la suite passe une proportion strictement positive de son temps arbirtrairement près de ce point : ça vous étonne que ce soit une valeur d'adhérence ?! Comme l'hypothèse porte sur la force, on réenroule la définition.*

Soit ℓ un réel tel que $F(\ell, u) > 0$. Soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$. Par monotonie de $H(\ell, u, \cdot)$, on a : $H(\ell, u, \varepsilon) \geq F(\ell, u) > 0$.

Or, $H(\ell, u, \varepsilon)$ est une valeur d'adhérence de $(H_m(\ell, u, \varepsilon))$. Par suite, pour tout m_0, il existe $m \geq m_0$ tel que

$$(\heartsuit) \quad H_m(\ell, u, \varepsilon) \geq F(\ell, u)/2.$$

Sens de cette relation : il y a au moins $mF(\ell, u)/2$ termes de la suites d'indices $< m - 1$ qui sont proche de ℓ. On en veut un dont l'indice soit $\geq n_0$: pas dur !

On choisit un entier m_0 assez grand pour être sûr d'avoir :

$$m_0 \frac{F(\ell, u)}{2} > 3n_0 + 10^{14}.$$

Alors, pour $m \geq m_0$ choisi comme dans $(\heartsuit)$, on a :

$$\text{card}\left\{n \in [\![0, m-1]\!],\ |u_n - \ell| < \varepsilon\right\} \geq m \frac{F(\ell, u)}{2} \geq 3n_0 + 10^{14} > n_0.$$

Il existe donc un entier $n \in [\![0, m-1]\!]$, avec $n \geq n_0$ et $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. C'est gagné.

34° **Suite divergente admettant un réel très fort**

Idée. *Les termes doivent être souvent proches de x mais la suite doit aller se faire voir ailleurs de temps en temps, sans y rester longtemps (une proportion négligeable du temps).*

Posons :

$$u_n = \begin{cases} 2 \times 10^n & \text{si } n \text{ est une puissance de 2,} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrons que $F(1, u) = 1$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on note p l'entier tel que $2^p \leq m < 2^{p+1}$. Il y a donc $p + 1$ puissances de 2 entre 0 et m, en-dehors desquelles u_n vaut 1, de sorte que :

$$\left\{n \in [\![0, m-1]\!],\ |u_n - 1| \leq \varepsilon\right\} \geq m - (p+1)$$

et

$$H_m(1, u, \varepsilon) = 1 - \frac{p+1}{m} \geq 1 - \frac{p+1}{2^p}.$$

Lorsque m tend vers l'infini, p aussi donc $H(1, u, \varepsilon) \geq 1$, ou mieux : $H(1, u, \varepsilon) = 1$. On en déduit : $F(1, u) = 1$.

35° **Une suite vraiment pas forte**

Idée. *On cherche une suite qui a beaucoup de valeurs d'adhérence mais qui ne s'attarde auprès d'aucune. Faute d'imagination, on sonde sa mémoire : bon sang, la question 11 ! Il s'agit alors d'estimer le temps passé auprès de chaque x : c'est la question la plus délicate du problème.*

On reprend la suite v et les notations de la question 11 : $v_n = k_n/2^{p_n}$ pour tout n. Montrons que $F(x, v) = 0$ pour tout $x \in [O, 1[$.

Soit $\varepsilon > 0$. Fixons $p \in \mathbb{N}$ et examinons les termes v_n pour $2^p \leq n < 2^{p+1}$. Le nombre d'indices n tels que $v_n \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ est majoré par : $2\varepsilon 2^p + 1$.

[En effet, si n et $n + M$ sont tous deux compris entre 2^p et $2^{p+1} - 1$, alors $u_{n+M} = u_n + M2^{-p}$. Si v_n est la plus petite valeur dans l'intervalle $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ et v_{n+M} est la plus grande, alors on a : $M2^{-p} \leq 2\varepsilon$ et il y a $M + 1$ termes dans l'intervalle.]

À présent, fixons $m \in \mathbb{N}^*$ et soit p_0 tel que $2^{p_0} \leq m-1 < 2^{p_0+1}$. On majore, grâce à ce qui précède :[1]

$$H_m(x,u,\varepsilon) \leq \frac{\sum_{p=0}^{p_0} 2\varepsilon 2^p + 2}{m} \leq 2\varepsilon \sum_{p=0}^{p_0} 2^{p-p_0} + \frac{2(p_0+1)}{2^{p_0}} \leq 5\varepsilon,$$

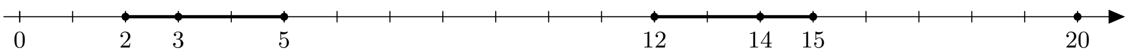
pour peu que l'on prenne p_0 assez grand pour que le terme de droite soit $< \varepsilon$.
Par passage à la limite inférieure, il vient : $0 \leq H(x,u,\varepsilon) \leq 5\varepsilon$ pour tout ε, d'où : $F(x,u) = 0$. Gagné.

III Un algorithme mystérieux

Remarquons que l'ordre des termes et les répétitions éventuelles n'interviennent pas dans la définition de $\mathcal{G}(L,r)$: si L' est la liste obtenue de L en supprimant les termes répétés et en ordonnant ceux qui restent, on a : $\mathcal{G}(L,r) = \mathcal{G}(L',r)$.

36° Un exemple d'école

Idée. *On prend chaque couple (x_i, x_j) pour $i \leq j$: si $|x_i - x_j| \leq 2$, on colorie en noir foncé l'intervalle $[x_i, x_j]$; sinon, on passe.*



On a :

$$\mathcal{G}(L,2) = [2,5] \cup [12,15] \cup [20,20], \quad \mathcal{N}(L,2) = 3.$$

Justifications (non demandées) :
- $[2,3] \subset \mathcal{G}$ en prenant $x_i = 2$, $x_j = 3$; de même, $[3,5] \subset \mathcal{G}$;
- $[5,12]$ n'apparaît pas dans la réunion car $12-5>2$; pour $x_i \leq 5$, $x_j \geq 12$, $x_j - x_i > 2$ donc $[x_i, x_j]$ non plus ;
- $[12,14] \cup [14,15] \subset \mathcal{G}$; $[20,20] \subset \mathcal{G}$;
- pour $x_i \leq 15$ et $x_j \geq 20$, $[x_i, x_j]$ n'apparaît pas dans la réunion.

37° Algorithme pour le calcul de $\mathcal{N}(L,r)$

Le programme suivant en Python fonctionne sur quelques exemples :

```
def G(L,r=2):               // 2 = valeur par défaut de r
    L.sort()
    R = list()              // initialisation du résultat
    a = L[0]; b=L[0]        // initialisation du
    for i in range(1,len(L)):
        if L[i]-L[i-1]<=r:
            b=L[i]
        else:
            R.append([a,b])// ajoute [a,b] à la liste R
            a=L[i]
            b=L[i]
    R.append([a,b])         // ajoute [a,b] à la liste R
    return R
def N(L,r=2):
    return len(G(L,r))
```

1. Le 2 qui apparaît au dénominateur provient du 1 qui précède, auquel on ajoute le terme u_0 qui peut, par hasard, être proche de x ; cela n'a pas d'importance car on divise par $m \geq 2^{p_0}$.

38° **Localisation des termes de la suite**

On fixe m et n compris entre p et p^2-1.
Supposons $|u_n - u_m| \leq \frac{2r}{5}$. Soit k_n l'entier tel que $u_n \in \left]y_{k_n} - \frac{2r}{5}, y_{k_n} + \frac{2r}{5}\right[$, on définit de même k_m. Alors :

$$|y_{k_n} - y_{k_m}| \leq |y_{k_n} - u_n| + |u_n - u_m| + |u_m - y_{k_m}| \leq \frac{r}{5} + \frac{2r}{5} + \frac{r}{5} < r.$$

Par définition de r, on en tire l'égalité $k_n = k_m$.
Inversement, supposons que $k_n = k_m$. Alors :

$$|u_n - u_m| \leq |u_n - y_k| + |y_k - u_m| \leq \frac{2r}{5}.$$

39° **Application à $\mathcal{G}(L_p, 2r/5)$**

Par la question 38, tous les intervalles intervenant dans la définition de $\mathcal{G}(L_p, \frac{2r}{5})$ sont contenus dans un des $\left]y_k - \frac{r}{5}, y_k + \frac{r}{5}\right[$. Donc leur réunion est incluse dans la réunion.

40° **Idée.** *Pour p grand, l'intervalle $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ contient une proportion strictement positive des p^2 premiers termes de la suite, donc strictement plus que $p+1$, donc au moins un d'indice supérieur à p.*
Soit $\varepsilon > 0$. Alors on a : $H(x,u,\varepsilon) \geq F(x,u) > 0$. Par suite, pour m_0 convenable et tout $m \geq m_0$, on a : $H_m(x,u,\varepsilon) \geq \frac{F(x,u)}{2} > 0$.
Pour $p \geq \sqrt{m_0}$, il vient alors :

$$\text{card}\left\{n \leq p^2-1,\ u_n \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\right\} \geq \frac{F(x,u)}{2} p^2.$$

Pour $p \geq p_\varepsilon$ convenable, $\frac{F(x,u)}{2}p^2 > p+1$. Donc il existe $n \leq p^2-1$, $n \geq p$, tel que $u_n \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$: c'est gagné.

41° Soit $k \in [\![1,q]\!]$. On prend $x = y_k$ et $\varepsilon = \frac{r}{5}$ dans la question précédente. On trouve P_k tel que pour $p \geq P_k$, $\left]y_k - \frac{r}{5}, y_k + \frac{r}{5}\right[$ contienne un des termes $u_p, \dots, u_{p^2-1}$. Posons $P = \max(P_1, \dots, P_q)$: pour $p \geq P$, on est donc certain que *chaque* intervalle $\left]y_k - \frac{r}{5}, y_k + \frac{r}{5}\right[$ contienne un des termes $u_p, \dots, u_{p^2-1}$. Comme $\mathcal{G}(L_p, \frac{2r}{5})$ contient tous les termes de L_p, chaque intervalle $\left]y_k - \frac{r}{5}, y_k + \frac{r}{5}\right[$ intersecte $\mathcal{G}(L_p, \frac{2r}{5})$.

42° Pour $p \geq P$, on a d'après la question 39 : $\mathcal{N}(L_p, \frac{2r}{5}) \geq q$. Mais d'après la question 41, on a : $\mathcal{N}(L_p, \frac{2r}{5}) \geq q$. D'où l'égalité souhaitée.

Remarque. *Au lieu de prendre p^2 termes dans L_p, on aurait pu se contenter d'en prendre $\lfloor p^{1+\alpha} \rfloor$ avec $\alpha > 0$ fixé.*