Préparation à l'agrégation interne de mathématiques - Année 2012-2013
Polynômes - 24 octobre 2012

Exercice 0. *Déterminer les racines de X^2 dans $\mathbf{Z}/36\mathbf{Z}$.*

1 L'anneau (et algèbre) $\mathbf{K}[X]$ des polynômes, degré

Exercice 1. **(inversibles et irréductibles)**

1. *Démontrer que les polynômes inversibles sont les polynômes constants non nuls.*
2. *Démontrer que les polynômes de degré 1 sont irréductibles.*

Exercice 2. **(division euclidienne)**

Effectuer la division euclidienne dans $\mathbf{R}[X]$ de $X^4 - 2X^3 - X^2 + X - 1$ par $X^2 + X + 1$.

Exercice 3. **(l'anneau $\mathbf{K}[X]$ est euclidien donc principal)**

1. *À l'aide d'une division euclidienne, démontrer que pour tout idéal I de $\mathbf{K}[X]$, il existe un polynôme P dans I tel que $I = \{PQ : Q \in \mathbf{K}[X]\}$.*
2. *Si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$, qu'obtient-on en considérant*

$$\{P \in \mathbf{K}[X] : P(u) = 0\}?$$

Exercice 4. **(divisibilité)**

Montrer que, pour tout polynôme P de $\mathbf{K}[X]$, $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.

2 Évaluation, fonction polynomiale, racines

Exercice 5. **(schéma de Hörner)**

Déterminer, en utilisant le schéma de Hörner, la valeur en 2 du polynôme

$$P = 3X^5 - 4X^4 + 3X^3 - 10X^2 - 5X + 4.$$

Combien ce calcul nécessite-t-il d'opérations ? Comparer avec le calcul « naïf ».

Exercice 6. **(idéaux, Vandermonde et corps finis)**

1. *Soit Δ un sous-ensemble de $\mathbf{K}$. Vérifier que l'ensemble I_Δ des polynômes P de $\mathbf{K}[X]$ vérifiant $\tilde{P}(x) = 0$ pour tout x dans Δ est un idéal de $\mathbf{K}[X]$.*
2. *Déterminer $I_{\{0\}}$ et $I_{\{0;1\}}$.*
3. *On suppose uniquement pour cette question que $\mathbf{K}$ est le corps $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ (p premier).*
Déterminer un générateur explicite de l'idéal $I_{\mathbf{K}^*}$, de l'idéal $I_{\mathbf{K}}$.

4. *Si $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ est un sous-ensemble (ordonné) de $n+1$ éléments du corps $\mathbf{K}$ et $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$ est un polynôme dans $\mathbf{K}[X]$, considérons les matrices suivantes*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{K}) \qquad ; \qquad V = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbf{K})$$

   (a) *Que vaut le produit MV ?*
   En déduire que P appartient à I_Δ si et seulement si V appartient au noyau $\ker M$.

   (b) *À quelle condition, portant sur Δ, la matrice M est-elle inversible ?*

   (c) *En déduire que le morphisme $\mathbf{K}[X] \to \mathbf{K}^{\mathbf{K}} : P \mapsto \tilde{P}$ est injectif si et seulement si $\mathbf{K}$ est infini.*

Exercice 7. **(exemples de factorisation sur R et C)**

1. *Sachant que $P = X^4 - 2X^3 - 11X^2 + 12X + 36$ a deux racines multiples, factoriser P sur $\mathbf{R}$.*
2. *Sachant que $P = X^4 + 2X^3 + 7X^2 + 8X + 12$ a une racine imaginaire pure, factoriser P sur $\mathbf{C}$.*
3. *Soient $P = X^6 + 1$ et $\omega = e^{i\frac{\pi}{6}}$.*
   Calculer $P(\omega)$, $P(\omega^3)$ et $P(\omega^5)$ puis en déduire la factorisation de P dans $\mathbf{C}[X]$ puis dans $\mathbf{R}[X]$.

Exercice 8. **(utilisation des racines)**

1. *Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, le polynôme $X^2 - 3X + 2$ divise dans $\mathbf{R}[X]$ le polynôme $P_n = (X-2)^{2n} + (X-1)^n - 1$.*
2. *Déterminer l'ensemble $\{P \in \mathbf{C}[X] : P(X^2) = P(X)P(X+1)\}$.*

Exercice 9. **(utilisation du polynôme dérivé)**

1. *Déterminer les polynômes P de $\mathbf{C}[X]$ de degré 5 vérifiant :*

$$(X-1)^3 \text{ divise } P(X) + 1 \qquad \text{et} \qquad (X+1)^3 \text{ divise } P(X) - 1.$$

2. *Démontrer que le polynôme $P_n = X^n - X + 1$ n'a que des racines simples sur $\mathbf{C}$ si $n \geqslant 2$.*

Exercice 10. **(liens entre coefficients et racines)**

1. *Déterminer le nombre complexe k de sorte que le polynôme $2X^3 - X^2 - 7X + k$ ait deux racines complexes de somme 1. Les déterminer.*
2. *Résolution, sur $\mathbf{C}$, du système* $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ xy + yz + xz = -2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 7 \end{cases}$

3 Polynômes et arithmétique des entiers

Exercice 11. **($PGCD$ et racines de l'unité)**

Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Déterminer le $PGCD$ des polynômes $X^a - 1$ et $X^b - 1$.

Exercice 12. **(un pont Wilson$\frown$exercice 6)**

Démontrer le théorème de Wilson en utilisant le polynôme $P = X^{p-1} - 1$ dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[X]$ et les relations entre coefficients et racines.

Exercice 13. **($\mathbf{Z}$ est « intégralement clos »)**

On considère un polynôme P unitaire et à coefficients entiers : $P = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_0$ avec $a_{d-1}, \cdots, a_0$ dans $\mathbf{Z}$.
Démontrer que toute racine de P qui n'est pas entière n'est pas rationnelle.
Indication : Supposer que $\frac{p}{q}$ est une racine rationnelle écrite sous forme irréductible et utiliser le théorème de Gauss.

Exercice 14. **(approximation de nombres algébriques)**

Soit x un nombre réel irrationnel algébrique, c'est-à-dire une racine d'un polynôme $P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ de degré n, à coefficients entiers et que l'on peut supposer sans racine rationnelle. Le but de l'exercice est de montrer que le réel x est « mal approché » par les rationnels et d'utiliser ce critère pour donner un exemple explicite de nombre transcendant.

1. *Soit $\frac{p}{q}$ un nombre rationnel (p et q entiers) de l'intervalle $[x-1; x+1]$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction $\phi : t \mapsto P\left(\frac{p}{q}\right) - P(t)$, démontrer que*

$$\left|x - \tfrac{p}{q}\right| \geqslant C\left|P\left(\tfrac{p}{q}\right)\right| \qquad \text{avec} \quad C = \left(\sup_{[x-1;x+1]} |P'(t)|\right)^{-1}$$

2. *En déduire, pour tout rationnel $\frac{p}{q}$ (p et q entiers, $q \geqslant 1$) de l'intervalle $[x-1; x+1]$, l'inégalité*

$$\left|x - \tfrac{p}{q}\right| \geqslant \frac{C}{q^n}.$$

3. *Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{10^{n!}}$ définit un nombre transcendant. (Ce nombre est appelé* constante de Liouville*).*