

Préparation à l'agrégation interne de mathématiques - Année 2012-2013

Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle
Éléments de correction des exercices - **version annotée** du 27 juin 2012

Les correctifs par rapport à la version distribuée au début de la séance sont **en rouge**.

Exercice 1. Utilisation de la relation d'ordre : automorphisme(s) du corps \mathbf{R}

Soit f un automorphisme du corps \mathbf{R} (une application $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ vérifiant $f(1) = 1$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$ et $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tous réels x et y).

Correction.

1. Pour tout réel $x \geq 0$, il existe y réel tel que $x = y^2$ donc $f(x) = f(y^2) = (f(y))^2 \geq 0$.
Si $x \geq y$, alors $f(x) - f(y) = f(x - y) \geq 0$ donc $f(x) \geq f(y)$.
2. Pour tous entiers p et q , q non nul : $qf\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(q\frac{p}{q}\right) = f(p) = pf(1) = p$ donc $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}$.
Pour tout réel a , il existe deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ de nombres rationnels, convergentes vers a et vérifiant $x_n < a < y_n$ pour tout indice n (suites adjacentes). Puisque f est croissante et égale à l'identité sur \mathbf{Q} , on a également $x_n = f(x_n) \leq f(a) \leq f(y_n) = y_n$ pour tout indice n .
Par passage à la limite et utilisation du théorème des gendarmes, on obtient $f(a) = a$.
Conclusion : le seul automorphisme de corps de \mathbf{R} est l'identité.

Exercice 2. Quelles sont les fonctions f continues sur \mathbf{R} telles que, pour tout réel x :

$f^2(x) = 1$? $f^2(x) = f(x)$? (Ici $f^2(x)$ désigne le produit $f(x)f(x)$.)

Correction. On a $f^2(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = 1$ ou $f(x) = -1$. Par continuité (et connexité de \mathbf{R}), f est constante, égale à 1 ou -1 .

De même si $f^2(x) = f(x)$: f est constante, égale à 0 ou 1.

Exercice 3. On note $E(x)$ la partie entière du réel x : $E(x) = \max\{n : n \in \mathbf{Z}, n \leq x\}$.

Étudier la continuité de la fonction $x \mapsto E(x) + (x - E(x))^2$.

Correction. La fonction E est continue sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ et continue à droite sur \mathbf{R} donc la fonction $x \mapsto E(x) + (x - E(x))^2$ également.

On vérifie la continuité à gauche en un point entier quelconque : si n appartient à \mathbf{Z} ,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x < n}} E(x) + (x - E(x))^2 = (n - 1) + (n - (n - 1))^2 = n = E(n) + (n - E(n))^2.$$

Donc la fonction est continue sur \mathbf{R} . (On peut également vérifier qu'elle est strictement croissante.)

Exercice 4. Continuité et relation algébrique (1)

Correction.

1. (a) Par récurrence, on montre que, pour tout réel x et tout entier n , $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(0)$ par continuité de f en 0, on obtient $f(x) = f(0)$ pour tout réel x .
(b) La fonction $\mathbf{1}_{\mathbf{Q}}$, indicatrice de \mathbf{Q} ($f(x) = 1$ si $x \in \mathbf{Q}$ et $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbf{Q}$), vérifie la relation et n'est continue en aucun point.
2. On a $f\left(\frac{x-1}{2}\right) = f(x)$ c'est-à-dire $f \circ \varphi = f$ d'où l'égalité $f \circ \varphi^n = f$. Pour tout réel x , la suite (arithmético-géométrique) $(\varphi^n(x))_n$ converge vers le réel -1 en lequel la fonction f est continue. On a ainsi $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(\varphi^n(x)) = f(-1)$.

Erreur de raisonnement dans les exercices 5 et 6 : une sous-suite extraite d'une suite récurrente (définie par itération d'une fonction) n'est pas une suite récurrente.

Exercice 5. Point fixe (théorème de Brouwer en dimension 1)

Correction.

1. L'application $g : I \rightarrow \mathbf{R} : x \mapsto f(x) - x$ est continue sur $I = [a; b]$ et vérifie $g(a) = f(a) - a \geq a - a = 0$ et $g(b) = f(b) - b \leq b - b = 0$. Donc g s'annule au moins une fois d'après le théorème des valeurs intermédiaires.
2. ~~Si x_0 est un point quelconque de I , la suite (récurrente) définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ est une suite d'éléments de l'intervalle compact I . Il existe donc une sous-suite convergente vers un réel ℓ appartenant à I . Par continuité de la fonction f , cette valeur d'adhérence vérifie $f(\ell) = \ell$.~~ Néanmoins, cet argument peut être utilisé avec plus de précaution. La justification est plus longue que dans 1. mais l'utilisation d'une suite est un argument qui peut apparaître dans des situations similaires.
Par l'absurde : supposons que $f(x) \neq x$ sur I . Alors la fonction continue $g : I \rightarrow \mathbf{R} : x \mapsto f(x) - x$ ne s'annule pas sur I donc est de signe constant ; on a donc $f(x) > x$ (ou $f(x) < x$) sur I . Si x_0 est un point quelconque de I , la suite (récurrente) définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ est une suite d'éléments de l'intervalle I . Cette suite est **monotone** car $x_{n+1} = f(x_n) > x_n$ (ou $x_{n+1} = f(x_n) < x_n$) et bornée (car I l'est). Elle est donc convergente vers un réel ℓ appartenant à I (car I est fermé). Par continuité de la fonction f , cette valeur d'adhérence vérifie $f(\ell) = \ell$. D'où la contradiction.
3. Le résultat est en défaut si I n'est pas compact : considérer par exemple $x \mapsto x+1$ si $I = [0; +\infty[$ et $x \mapsto \frac{x+1}{2}$ si $I = [0; 1[$.

Exercice 6. Continuité et relation algébrique (2) **Exercice adapté de façon incorrecte.**

On considère un intervalle compact I et deux fonctions f et g continues sur I , à valeurs dans I et qui commutent ($f \circ g = g \circ f$). ~~On veut montrer qu'il existe un point fixe commun à f et g~~

Correction.

1. L'ensemble $Fix(f)$ des points fixes de f est fermé car $Fix(f) = h^{-1}\{0\}$ avec $h(x) = f(x) - x$ (image réciproque d'un fermé par l'application continue h), non-vide d'après le résultat de l'exercice précédent et invariant par g car : si x_0 appartient à $Fix(f)$, alors $g(x_0) = g(f(x_0)) = f(g(x_0))$ donc $g(x_0)$ appartient à $Fix(f)$.
2. Puisque x_0 appartient à I et $g(I) \subseteq I$, la suite $(x_n)_n$ est à valeurs dans l'intervalle I donc possède une sous-suite convergente dans I car I est compact.
3. ~~La limite ℓ de cette sous-suite convergente appartient à I et vérifie (par continuité de g) $g(\ell) = \ell$. De plus tous les termes x_n appartiennent à $Fix(f)$ donc ℓ appartient à $\overline{Fix(f)} = Fix(f)$. Le réel ℓ est un point fixe commun à f et g .~~

Exercice 7. Continuité et relation algébrique (3) : morphismes continus du groupe \mathbf{R}

Soit f un morphisme du groupe $(\mathbf{R}; +)$ (une application $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ vérifiant $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous réels x et y). On suppose de plus que l'application f est continue en 0.

Correction.

1. L'égalité $2f(0) = f(0+0) = f(0)$ montre que $f(0) = 0$. L'égalité $f(a+h) = f(a) + f(h)$ pour tous réels a et h justifie alors que

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a) + \lim_{h \rightarrow 0} f(h) = f(a) + f(0) = f(a).$$

La fonction f est donc continue en tout point a de \mathbf{R} .

2. Pour tous entiers p et q , q non nul : $qf\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(q\frac{p}{q}\right) = f(p) = pf(1)$ donc $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}f(1)$.
 Les fonctions continues f et $x \mapsto xf(1)$ sont continues sur \mathbf{R} et coïncident sur le sous-ensemble \mathbf{Q} qui est dense dans \mathbf{R} . Donc $f(x) = xf(1)$ pour tout réel x .

Exercice 8. Bijection continue et homéomorphisme : le cas compact.

Soit $f : I \rightarrow J$ une bijection continue entre deux intervalles I et J avec I compact.

Correction.

1. L'application $f : I \rightarrow J$ est supposée surjective et continue donc $J = f(I)$ est l'image d'un intervalle compact par une application continue. Donc J est compact.
2. Si \mathcal{F} est un fermé de I , alors c'est un compact. Son image réciproque par l'application f^{-1} est $(f^{-1})^{-1}(\mathcal{F}) = f(\mathcal{F})$ donc est compacte (image d'un compact par f continue). En particulier cette image réciproque est un fermé de J . Ceci démontre que f^{-1} est continue (En effet, par passage au complémentaire, l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert.)

Exercice 9. Uniforme continuité ; caractère lipschitzien

Correction.

1. Si $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est uniformément continue, il existe un réel $\eta > 0$ vérifiant l'implication ($x, y \in \mathbf{R}$, $|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 1$). Distinguons les cas $x > 0$ et $x < 0$.
 (i) Supposons $x > 0$. Il existe alors un entier p tel que $p\eta \leq x < (p+1)\eta$ (p est la partie entière de $\frac{x}{\eta}$). On a alors

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \left(\sum_{k=0}^{p-1} f((k+1)\eta) - f(k\eta) \right) + (f(x) - f(p\eta)) \\ |f(x)| &\leq |f(0)| + \sum_{k=0}^{p-1} |f((k+1)\eta) - f(k\eta)| + |f(x) - f(p\eta)| \\ |f(x)| &\leq |f(0)| + p \times 1 + 1 = p + 1 + |f(0)| \leq \frac{x}{\eta} + 1 + |f(0)| \end{aligned}$$

(ii) Un raisonnement similaire lorsque $x < 0$ permet d'obtenir $|f(x)| \leq \frac{-x}{\eta} + 1 + |f(0)|$.

(iii) L'inégalité $|f(x)| \leq \frac{|x|}{\eta} + 1 + |f(0)|$ est aussi vérifiée si $x = 0$.

2. La propriété précédente implique que, si f est uniformément continue sur \mathbf{R} , alors le quotient $\frac{f(x)}{x}$ est borné. Ce n'est pas le cas des fonctions polynomiales de degré au moins 2.
3. La fonction $[0; 1] \rightarrow \mathbf{R} : x \mapsto \sqrt{x}$ est continue donc uniformément continue sur $[0; 1]$ (théorème de Heine). Elle n'est pas lipschitzienne car le quotient $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ n'est pas borné.

Exercice 10. Homéomorphismes de \mathbf{R} : extraits du sujet d'analyse 2011

Correction. **Partie I-3.**

- (a) La fonction Δ étant continue sur l'ensemble connexe Π_+ , son image est donc un sous-ensemble connexe de \mathbf{R} , c'est-à-dire un intervalle. Par injectivité Δ ne s'annule pas donc l'image $\Delta(\Pi_+)$ est contenue dans l'intervalle $] -\infty; 0[$ (ou $]0; +\infty[$) auquel cas la fonction f est strictement croissante (ou strictement décroissante).
- (b) Nous devons montrer que l'application réciproque $f^{-1} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est continue. Si $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est continue et bijective, alors f est strictement monotone d'après ce qui précède. Donc

$f^{-1} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction bijective et strictement monotone. On peut supposer f et f^{-1} strictement croissantes. Dans ce cas, pour tout réel a , on a les inégalités

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f^{-1}(x) = \sup_{x < a} f^{-1}(x) \leq f^{-1}(a) \leq \inf_{x > a} f^{-1}(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f^{-1}(x)$$

qui ne peuvent être strictes par surjectivité de f^{-1} . Donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f^{-1}(x) = f^{-1}(a) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f^{-1}(x)$$

ce qui justifie la continuité de f^{-1} .

(c) L'implication (ii) \Rightarrow (i) est évidente. La réciproque est justifiée dans la question précédente (Un homéomorphisme est une application bijective f telle que f et f^{-1} soient continues.).

Partie IV

1. Une fonction f dérivable sur \mathbf{R} satisfait la propriété (H) si et seulement si $m \leq f'(x) \leq M$ pour tout réel x .
2. Supposons la propriété (H) vérifiée par la fonction f .
 - La fonction f est continue sur \mathbf{R} car lipschitzienne (de rapport M).
 - La fonction f est strictement croissante car $y - x$ et $f(y) - f(x)$ sont de même signe.
 - La propriété (H) implique les deux inégalités $f(y) \geq my + f(0)$ si $y > 0$ et $f(y) \leq my + f(0)$ si $y < 0$ qui justifient que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.
 - Les trois propriétés précédentes montrent que f réalise une bijection continue (strictement croissante) de \mathbf{R} sur \mathbf{R} . La question I-3. permet d'affirmer que f est un homéomorphisme.
3. On a $F_k(y) - F_k(x) = f(y) - f(x) - \frac{m}{2}(y-x) - \frac{M}{2}(y-x)$. Si $y > x$, alors

$$m(y-x) - \frac{m}{2}(y-x) - \frac{M}{2}(y-x) \leq F_k(y) - F_k(x) \leq M(y-x) - \frac{m}{2}(y-x) - \frac{M}{2}(y-x)$$

$$\frac{m-M}{2}(y-x) \leq F_k(y) - F_k(x) \leq \frac{M-m}{2}(y-x)$$

Le même raisonnement si $y < x$, permet d'obtenir, pour tous réels x et y , l'inégalité

$$|F_k(y) - F_k(x)| \leq \frac{M-m}{2}|y-x|$$

Donc F_k est lipschitzienne de rapport $\frac{M-m}{2}$.

Exercice 11. Signe de la dérivée et variation

Correction.

- (a) f est croissante $\iff f' \geq 0$: $\boxed{\Rightarrow}$ est une conséquence de la conservation des inégalités larges par passage à la limite tandis que $\boxed{\Leftarrow}$ nécessite l'utilisation du théorème de Rolle.
- (b) f admet un extremum local en $x_0 \iff f'(x_0) = 0$: $\boxed{\Rightarrow}$ est une conséquence de la conservation des inégalités larges par passage à la limite tandis que $\boxed{\Leftarrow}$ est fausse.

Exercice 12. Racines réelles d'un polynôme

Correction.

1. Conséquence du théorème des valeurs intermédiaires (continuité et limites infinies opposées).
2. Si $a_1 < a_2 < \dots < a_r$ sont r racines réelles distinctes de P , on peut appliquer le théorème de Rolle sur les $r-1$ intervalles $]a_k; a_{k+1}[$ (car $P(a_k) = 0 = P(a_{k+1})$) pour justifier que P' s'annule au moins une fois sur chacun de ces intervalles.

Exercice 13. La fonction arctan

Correction.

- La fonction \tan est de classe \mathcal{C}^1 (resp. \mathcal{C}^k) sur $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et vérifie $\tan' = 1 + \tan^2 \geq 1 > 0$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow \pm\pi/2 \\ x \in I}} = \pm\infty$. Donc \tan réalise une bijection de classe \mathcal{C}^1 (resp. \mathcal{C}^k) de I sur \mathbf{R} dont la fonction réciproque est de classe \mathcal{C}^1 (resp. \mathcal{C}^k) sur \mathbf{R} (on parle de difféomorphisme).
- Pour tout réel x : $\arctan'(x) = \tan^{-1}(x) = \frac{1}{\tan'(\tan^{-1}(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\tan^{-1}(x))} = \frac{1}{1 + x^2}$.

Exercice 14. Exemple d'homéomorphisme polynomialCorrection. On considère la fonction f définie sur \mathbf{R} par $f(x) = 2x^3 + x^2 + x$.

- Une fonction lipschitzienne sur \mathbf{R} vérifie en particulier que le quotient $\frac{f(x)}{x}$ est borné (car $f(x) - f(0) \leq k|x|$). Donc f n'est pas lipschitzienne sur \mathbf{R} .
- La fonction f est continue, strictement croissante sur \mathbf{R} et vérifie $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = \pm\infty$ donc f réalise une bijection continue et même un homéomorphisme, et même (soyons fous!) un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 1$, de \mathbf{R} sur \mathbf{R} .
- Cherchons l'ensemble des réels α vérifiant l'inégalité $|f^{-1}(y)| \leq \alpha|y|$ pour tout réel y :

$$(\forall y, |f^{-1}(y)| \leq \alpha|y|) \Leftrightarrow (\forall x, |x| \leq \alpha|f(x)|) \Leftrightarrow (\forall x \neq 0, 1 \leq \alpha|2x^2 + x + 1|)$$

Le trinôme $2x^2 + x + 1$ admet $\frac{7}{8}$ pour minimum donc le réel $\alpha = \frac{8}{7}$ convient.

Remarque : la majoration de la dérivée $(f^{-1})'$ (obtenue en minorant f') et l'application des accroissements finis entre 0 et y fournissent l'inégalité $|f^{-1}(y)| \leq \frac{6}{5}|y|$ qui est un peu moins précise.

Exercice 15. Soit f la fonction définie sur \mathbf{R} par $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Correction. Sur \mathbf{R}^* , f est de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 1$. La majoration $|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}| = |x \sin(\frac{1}{x})| \leq |x|$ montre que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

La fonction dérivée $f' : x \mapsto \begin{cases} 2x + \cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ n'est pas continue en 0.

Exercice 16. Dérivée et valeurs intermédiaires : le théorème de Darboux

Correction.

- La fonction φ (resp. ψ) est clairement dérivable sur $]a; b[$ et continue sur $]a; b[$ resp. sur $[a; b[$ avec $\varphi(b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \psi(a)$. Elle admet un prolongement par continuité sur $[a; b]$ en posant $\varphi(a) = \lim_{\substack{t \rightarrow a \\ t > a}} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = f'(a)$ (resp. $\psi(b) = \lim_{\substack{t \rightarrow b \\ t < b}} \frac{f(b) - f(t)}{b - t} = f'(b)$).
- Par continuité, les images $\varphi([a; b])$ et $\psi([a; b])$ sont deux intervalles. Ces deux intervalles ne sont pas disjoints car $\varphi(a) = \psi(b)$ donc leur réunion $\varphi([a; b]) \cup \psi([a; b])$ est un intervalle qui contient $f'(a)$ et $f'(b)$.
- Si λ est une valeur intermédiaire entre $f'(a)$ et $f'(b)$, il existe donc un réel c appartenant à $[a; b]$ tel que $\varphi(c) = \lambda$ (ou $\psi(c) = \lambda$).
Le théorème de Rolle, appliqué à f , garantit alors que $\lambda = \varphi(c) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a} = f'(d)$ avec d

un réel de l'intervalle $]a; c[$ (ou que $\lambda = \psi(c) = \frac{f(b)-f(c)}{b-c} = f'(d)$ avec d un réel de l'intervalle $]c; b[$).

Exercice 17. Dérivabilité et relation algébrique

On cherche à déterminer les fonctions f définies sur \mathbf{R} , dérivables en 0 et vérifiant la relation $f(2x) = 2f(x)$ pour tout réel x .

Correction.

1. Raisonnement par récurrence.
2. La relation vérifiée par f implique que $f(0) = 2f(0)$ c'est-à-dire $f(0) = 0$. Pour tout entier naturel n et tout réel x non nul, on a :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x} = \frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right) - f(0)}{\frac{x}{2^n} - 0}.$$

En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient $\frac{f(x)}{x} = f'(0)$ c'est-à-dire $f(x) = f'(0)x$.

3. La fonction valeur absolue est un contre-exemple.
Plus généralement, toute fonction de la forme $x \mapsto ax\mathbf{1}_{\mathbf{R}^-} + bx\mathbf{1}_{\mathbf{R}^+}$ avec a et b réels quelconques.
Et un contre-exemple continu seulement en 0 : $x \mapsto x\mathbf{1}_{\mathbf{Q}}$.

Exercice 18. Sujet d'analyse 2007

Les parties I.A. et I.B. portent sur les « dérivées au sens généralisées » (la limite du taux d'accroissement peut être infini), la dérivabilité d'une fonction réciproque et l'exemple de la fonction racine cubique.

Une partie des questions consistent à démontrer des résultats proches de ceux du programme : dérivée de la fonction réciproque, condition d'extremum local, théorème de Rolle, critère d'uniforme continuité.

La partie III.A. consiste en une démonstration du théorème de Baire sur \mathbf{R} .