Calcul Matriciel

Exercice 1

Soient A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et B = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Calculer AB, BA, A², B², A² – B², (A + B)(A – B), A² + 2AB + B², (A+B)²

Exercice 2

Vérifier (très) rapidement que les ensembles ci-dessous sont des sous-espaces vectoriels de M_n(IK) et donner leur dimension (On pourra utiliser la base canonique de M_n(IK))

a) Sous-espace vectoriel des matrices à coefficients constants
b) Sous-espace vectoriel des matrices diagonales
c) Sous-espace vectoriel des matrices scalaires (ou homothéties)
d) Sous-espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures
e) Sous-espace vectoriel des matrices symétriques
f) Sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques

Exercice 3

Soit A = $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui a pour matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ notée (e_1, e_2, e_3) .

1) Montrer que $f \circ f(e_1) = f(e_2) = 0$ et que $f \circ f(e_3) = f(e_3)$
2) En déduire A²
3) Vérifier que $A^3 = A^2$
4) Donner une base de Kerf et de Imf

Exercice 4

Soit A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ et *f* l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui a pour matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ notée (e_1, e_2, e_3)

1) Pour i=1,2,3 déterminer $f \circ f(e_i)$ puis $f^3(e_i)$
2) En déduire A² et A^3
3) Déterminer l'expression de A^k en fonction de k
4) Pour k ∈ $\mathbb{N}$ donner une expression de $(I_3 + A)^k$ en fonction de k. Même question pour $(3 I_3 - 2 A)^k$

Exercice 5

Soit A = $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ Calculer A^{100} à l'aide de J = $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Exercice 6

Soit *B* la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note *B′* la famille de vecteurs définis par leurs coordonnées :

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

1) Vérifier que *B′* est une base
2) Les coordonnées de u sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans *B*. Quelles sont les coordonnées de u dans *B′* ?

Exercice 7

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans les bases canoniques ($\vec{I}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$, $\vec{L}$) et ($\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$) est $\begin{bmatrix} 2 & 5 & -7 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

On définit deux bases : B= $\left(\vec{I}, \vec{J}, 4\vec{I}+\vec{J}-3\vec{L}, -7\vec{I}+\vec{K}+5\vec{L}\right)$ et B'= $\left(4\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}, 5\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}, \vec{k}\right)$

Quelle est la matrice de f relativement à B et B'

Exercice 8

Soit A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1) Calculer A² et A^3
2) On pose N = A – I. Pour n ∈ $\mathbb{N}$, calculer N^n On dit que N est une matrice nilpotente.
3) Montrer que ∀ n ∈ $\mathbb{N}$, A^n s'écrit sous la forme : $A^n = \begin{bmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   On pourra utiliser la formule du binôme de Newton.

Exercice 9

Soit x ∈ $\mathbb{R}$*. On donner A = $\begin{bmatrix} 0 & x & x^2 \\ \frac{1}{x} & 0 & x \\ \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x} & 0 \end{bmatrix}$

1) Montrer que quel que soit x, A est inversible.

2) Montrer qu'il existe deux réels λ et μ tels que $(A - \lambda I)(A - \mu I) = 0$

3) Calculer l'inverse de A

4) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \alpha_n A + \beta_n I$ où α_n et β_n sont des entiers naturels.

5) On définit les suites u et v par :

   $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \alpha_n - \beta_n$ et $v_n = 2\alpha_n + \beta_n$
   Montrer que les suites *(u)* et *(v)* sont géométriques et en déduire les expresssions de u_n et v_n en fonction de n.

6) Expliciter α_n et β_n en fonction de n et en déduire A^n

Exercice 10

On considère $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

1) Trouver toutes les matrices B carrées d'ordre 3 telles que AB = 0
2) Trouver toutes les matrices C d'ordre 3 telles que AC = CA = 0

Exercice 11

Trouver l'expression générale de l'inverse d'une matrice de taille 2
On considère $M_2(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Déterminer toutes les matrices inversibles de $M_2(\mathbb{K})$.

Exercice 12

On note E_{ij} la base canonique de $M_n(K)$. Pour rappel, E_{ij} est la matrice qui présente un 1 à l'intersection de la *i*ème ligne avec la *j*ème colonne et des 0 partout ailleurs.

1) $\forall (i,j,k,l) \in \mathbb{N}^4$ montrer que $E_{ij} \times E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}$ où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.
2) Soit $Z = \{ Z \in M_n(K)\ ZA = AZ\ \forall A \in M_n(K).\}$ Montrer Z que est l'ensemble des homothéties. Autrement dit $Z = \{ \lambda I,\ \lambda \in K \}$.

Exercice 13

On se place dans l'espace vectoriel des polynômes de degré n à une indéterminée dans le corps $\mathbb{K}$ muni de la base canonique $(1, X, X^2, X^3, .. X^n)$

Pour tout entier de k de [0..n] on pose $q_k(x) = 1 + x + \ldots + x^k$

1) Écrire la matrice M des coordonnées de la famille des q_k dans la base canonique et en déduire qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{K}_n[X]$

2) Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k$ Déterminer les coordonnées de P dans la base des (q_k).