



Jeux à
stratégie gagnante

Groupe « Jeux »

Sommaire

1	Jeux à stratégie gagnante	1
1.1	Définitions	1
1.2	Comment jouer?	1
2	<i>Chomp</i>	2
3	Le jeu de Nim, la course à 20, ...	3
3.1	Le jeu de Nim	3
3.2	Le jeu de Wythoff	3
3.3	La course à 20	4
4	Dominos – Cram	5
5	<i>Hex</i>	6
6	<i>Quarto</i>	7
7	<i>Sprouts</i>	8
8	Bibliographie	9

1 Jeux à stratégie gagnante

1.1 Définitions

Les *jeux à stratégie gagnante* sont des jeux à deux joueurs (adversaires), et la règle du jeu est la même pour les deux joueurs.

1. La règle du jeu définit, pour toute position A donnée à l'un des joueurs, celles qu'il peut obtenir en jouant : les images de la position A .
2. On est forcé de jouer, sauf si on ne peut plus. Dans ce cas, aucun coup respectant la règle du jeu n'est possible, on dit qu'on est *bloqué*.
3. Dans un jeu *direct*, le joueur bloqué est le perdant. Dans un jeu *inverse* il est le gagnant.
4. Le graphe du jeu est progressivement fini (tous ses chemins sont de longueur finie).

1.2 Comment jouer ?

Un joueur connaît la stratégie (c'est un *expert*) s'il sait déduire d'une position non élément du noyau une position qui y appartient.

Dans le jeu direct,

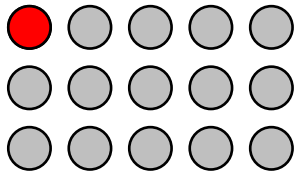
- placé devant une position n'appartenant pas au noyau, ce joueur laisse à son adversaire une position du noyau (position perdante), et reçoit donc de lui une position n'y appartenant pas (position gagnante), il est le gagnant ;
- placé devant une position appartenant au noyau, ce joueur joue un coup d'attente, espérant une faute de son adversaire : que celui ci lui offre une position n'appartenant pas au noyau.

Le cas du jeu inverse est plus complexe.

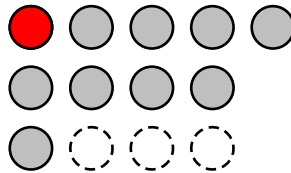
2 *Chomp*

*Chomp*¹ est joué avec une « tablette de chocolat », c'est-à-dire un rectangle composé de blocs carrés.

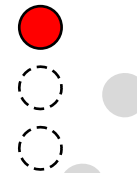
Les joueurs choisissent un carré à tour de rôle, et le « mange », ainsi que tous les carrés situés à sa droite ou plus bas. Le carré en haut à gauche est empoisonné et celui qui le mange perd la partie.



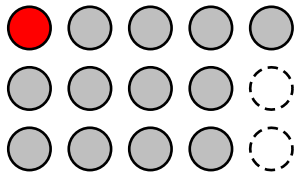
0. Initialement



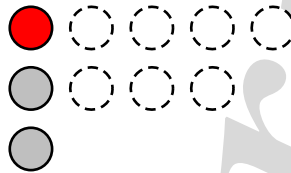
2. Joueur B



4. Joueur B



1. Joueur A



3. Joueur A



5. Joueur A

Le joueur A commence.

Chaque joueur choisit un carré, et le mange, ainsi que les carrés situés à droite ou plus bas : les carrés mangés sont indiqués en pointillés.

L'avant-dernière figure montre le dernier coup du joueur B.

C'est alors au joueur A de jouer. Il ne lui reste que le carré empoisonné : il est obligé de le manger et perd ainsi la partie.

Quelle est la stratégie gagnante ?

1. Le jeu a été proposé en 1974 par David Gale, dans *A curious Nim-type game*, Amer. Math. Monthly 81 (1974) 876-879.

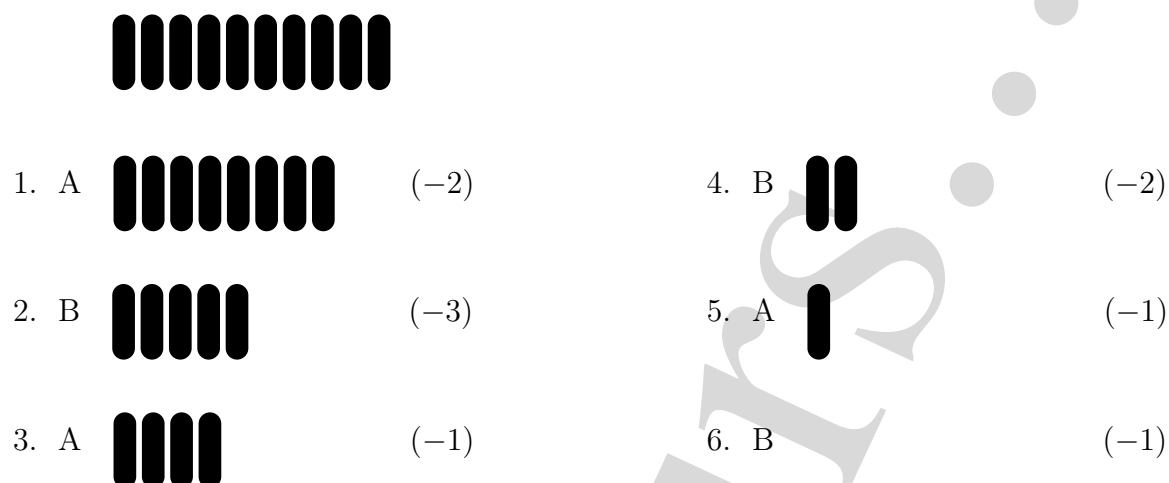
3 Le jeu de Nim, la course à 20, ...

3.1 Le jeu de Nim

Dans le *jeu de Nim*², il s'agit de prendre, de déplacer ou de poser un certain nombre d'objets ; selon les variantes, le dernier à jouer gagne ou perd.

Nous prendrons comme règle que celui qui prend la dernière allumette a perdu.

Voici un exemple de partie. Dix allumettes sont au départ ; chaque joueur peut, à son tour, en retrancher une, deux ou trois. La partie est gagnée par A.



Quelle est la stratégie gagnante ?

Variantes

1. Le nombre initial d'allumettes n'est pas 10 mais un autre entier (20, 50, 2012, ...).
2. Le retrait maximal n'est plus 3 mais un autre entier (2, 5, ...).
3. Extension à plusieurs tas. À son tour, le joueur retire au moins un carré de l'un des tas.

3.2 Le jeu de Wythoff

Dans le *jeu de Wythoff*³, variante du *jeu de Nim*, il y a deux tas d'objets.

À son tour, le joueur

- retire au moins un objet de l'un des tas ;
- retire le même nombre d'objets sur chaque tas.

Celui qui prend le dernier objet a gagné.

Quelle est la stratégie gagnante ?

Variante

On déplace un jeton à tour de rôle sur un damier, soit en se déplaçant vers la gauche, soit en se déplaçant vers le bas, soit en se déplaçant le long d'une diagonale vers la gauche et le bas, le joueur atteignant la case inférieure gauche a gagné.

2. Il existe de nombreuses variantes de ces jeux très connus, avec des allumettes, des pièces, des graines, des billes, etc. Les origines du *jeu de Nim* remontent très loin dans le temps, si bien qu'il est impossible d'indiquer avec certitude leur provenance. Ils sont signalés en Chine sous le nom de *fan-tan* et connus en Afrique sous le nom de *tiouk-tiouk*. Leur nom actuel nous vient de l'allemand *nimm!* qui signifie *prends!*, et leur a été donné par le mathématicien anglais Charles Leonard Bouton en 1901.

3. Il a été inventé en 1907 par le mathématicien hollandais Willem Abraham Wythoff.

3.3 La course à 20

Dans ce jeu⁴, à partir de la valeur 0, chacun des deux joueurs dit à son tour un nombre, obtenu du précédent⁵ en lui ajoutant 1 ou 2.

Le premier qui arrive à 20 a gagné.

Quelle est la stratégie gagnante ?

Variantes

1. La valeur finale à atteindre n'est pas 20 mais un autre entier (50, 2012, ...).
2. L'ajout maximal n'est plus 2 mais un autre entier (3, 5, ...).

EN COURS...

4. Proposé par G. Brousseau en 1978.

5. Proposé donc par son adversaire.

4 Dominos – *Cram*

Soit un entier n .

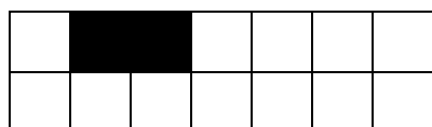
Sur un damier rectangulaire à 2 rangées et n colonnes, deux joueurs posent à tour de rôle un domino de taille 2 sur 1 qu'ils prennent d'une pioche inépuisable.

Chaque nouveau domino doit occuper deux cases libres, horizontalement ou verticalement, et reste à cet emplacement sur le plateau jusqu'à la fin de la partie.

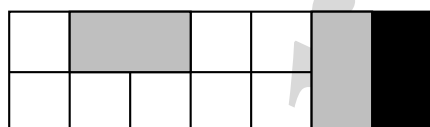
Le premier joueur qui ne peut pas jouer a perdu.

Quelle est la stratégie gagnante ?

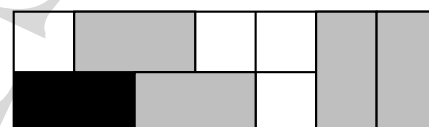
Exemple de partie⁶ avec $n = 7$, gagnée par le joueur B :



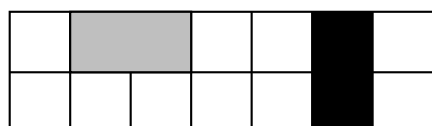
1. Joueur A



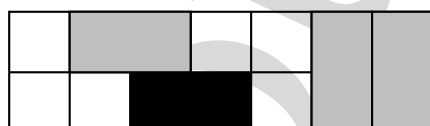
3. Joueur A



5. Joueur A



2. Joueur B



4. Joueur B



6. Joueur B

Variantes

1. Le jeu $m \times n$ est aussi appelé *Cram*.⁷
2. Dans la version appelée *Domineering*, le joueur A place ses dominos horizontalement, et le joueur B, verticalement.

6. Les joueurs n'ont peut-être pas joué les meilleurs coups !

7. Il a été popularisé par Martin Gardner dans « Mathematical Games : Cram, crosscram and quadrupage : new games having elusive winning strategies », Scientific American 230 (2) : 106–108.

5 Hex

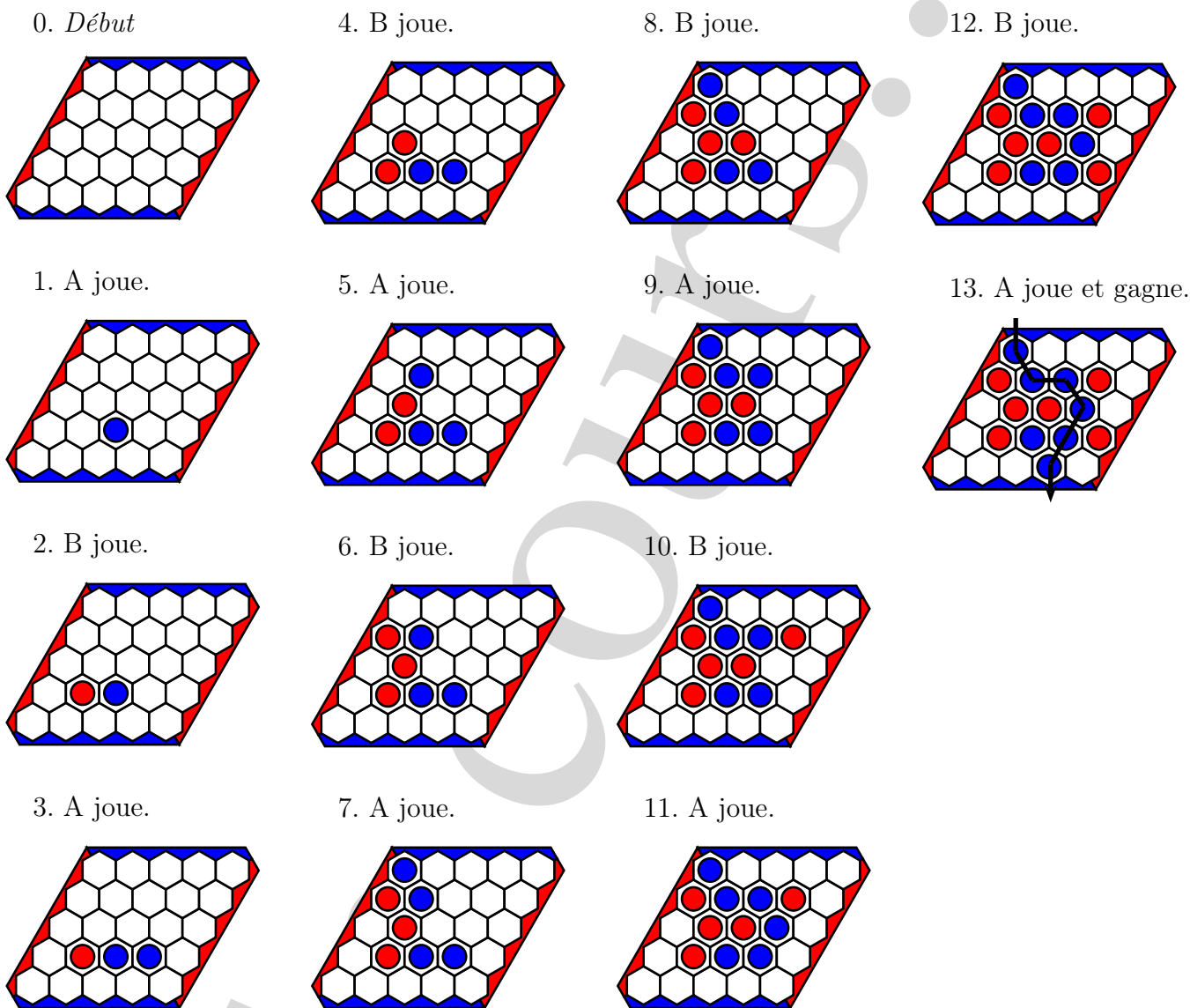
Hex se joue sur un plateau en forme de losange dont les cases sont hexagonales.⁸

Au début de partie, un plateau vide sépare deux joueurs. Deux bords opposés ont la même couleur, ici bleu et rouge.

Chaque joueur possède des pions à leur couleur qu'ils disposent tour à tour sur une case de leur choix et un par un. Le plateau se remplit ainsi progressivement.

Un joueur a gagné lorsqu'il a relié les deux côtés opposés du damier de sa couleur par une ligne continue.

Voici un exemple de partie, sur un damier 5×5 , où A (en bleu) gagne.



Une règle supplémentaire est parfois appliquée. Si Bleu commence, il joue le premier coup, Rouge a alors le choix entre jouer à son tour ou intervertir les couleurs. Dans ce cas, le joueur qui a commencé devient alors Rouge, et joue alors son premier coup en tant que Rouge, le jeu continuant ensuite normalement.



Quelle est la stratégie gagnante ?

8. Toutes les dimensions du côté du losange sont possibles, la plus traditionnelle est celle composée par 11 hexagones. L'un des inventeurs du jeu, John Nash, préconise un plateau de taille 14×14 .

6 Quarto

Le jeu de *Quarto*⁹ se joue sur une grille 4×4 à l'aide de 16 pièces différentes.

Chacune des pièces possède quatre caractéristiques : couleur (claire, foncée), forme (ronde, carrée), trou (pleine, trouée), hauteur (haute, basse).

Ainsi,  est défini par « Foncé – Carré – Creux – Grand » et , par « Clair – Rond – Plein – Petit ».










Les pièces n'appartiennent à aucun des deux joueurs mais forment une pioche commune.

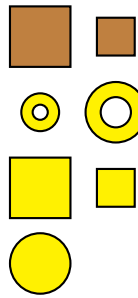
La pièce qu'un joueur pose à son tour de jeu est choisie par son adversaire.

Le but est de réaliser un alignement dans l'une des caractéristiques, les joueurs plaçant une pièce à tour de rôle.

Voici une fin de partie, illustrée ci-dessous. À gauche, se trouve le plateau à cet instant (le codage ne sert ici que pour les explications) et à droite, les pièces restantes.

C'est à A de jouer : il doit donc donner l'une des sept pièces à B, que celui-ci posera sur le plateau.

	1	2	3	4
A				
B				
C				
D				




Les trois pièces de la ligne A (ou de la colonne 2) sont rondes. A ne doit donc pas donner à B une pièce ronde, qui compléterait l'alignement, mais une pièce carrée.

Les trois pièces de la ligne B (ou de la colonne 1 ou de la diagonale descendante) sont creuses. A doit donc donner à B une pièce pleine.

Les trois pièces de la colonne 3 sont foncées. A doit donc donner à B une pièce claire.

Les trois pièces de la ligne C sont petites. A doit donc donner à B une pièce grande.

Par conséquent, A doit donner à B une seule pièce : « Clair – Carré – Plein – Grand », soit . Toute autre pièce le ferait perdre. (Il est d'ailleurs sûr de gagner au prochain coup.)

Quelle est la stratégie gagnante ?

9. Il a été créé par Blaise Muller sous le nom de 4×4 et édité depuis 1991 par Gigamic. C'est l'un des jeux les plus primés.

7 *Sprouts*

Ce jeu¹⁰ se joue à deux joueurs avec un stylo et une feuille de papier.

Au départ, il y a deux points (ou, plus généralement, n points) sur la feuille. Chaque joueur, à tour de rôle, relie deux points existants par une ligne et ajoute un nouveau point sur cette ligne.

Deux contraintes doivent être respectées :

1. les lignes ne peuvent se croiser ;
2. un point ne peut pas être relié à plus de trois lignes.

Celui qui ne peut plus jouer sans enfreindre les deux contraintes a perdu.

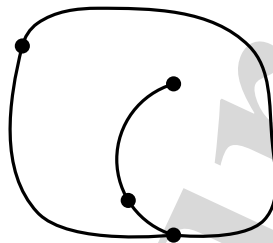
La figure ci-dessous donne un exemple de partie, avec $n = 2$ points.

Après quatre coups, la partie est terminée, et le joueur A a perdu car il ne peut plus jouer.

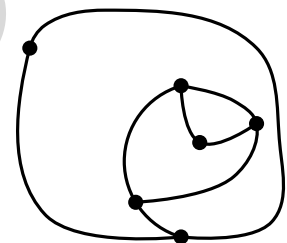
0. Situation initiale



2. B joue.



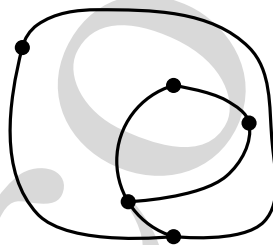
4. B joue.



1. A joue.



3. A joue.



Quelle est la stratégie gagnante ?

¹⁰ Inventé en 1967 à l'Université de Cambridge par les mathématiciens John Horton Conway et Michael Paterson. *Sprouts* se traduit par *germes*.

8 Bibliographie

Présentation générale

http://iufm.univ-lyon1.fr/UCDmath/jeux_a_strategie_gagnante/theorie.html

<http://www2.ulg.ac.be/sciences/pedagogique/dossierpds2012/l103.pdf>

<http://www-sop.inria.fr/members/Frederic.Havet/FeteScience/impartial.pdf>

Chomp

[http://fr.wikipedia.org/wiki/Chomp_\(jeu\)](http://fr.wikipedia.org/wiki/Chomp_(jeu))

« La gaufre empoisonnée », *Jeux 7*, APMEP, 2005

Jeux de Nim

http://fr.wikipedia.org/wiki/Jeux_de_Nim

Les jeux de Nim, Jacques Bouteloup, ADCS, 1996

http://eroditi.free.fr/Enseignement/DDML3S1_08-09/DDML30809S1_C5_TSDb.pdf

http://fr.wikipedia.org/wiki/Jeu_de_Wythoff

Cram

http://fr.wikipedia.org/wiki/Jeu_de_Cram

http://sfodem.um2.fr/BibliothequeSfodem/annexes/jeu_dominos.pdf (IREM de Montpellier)

Hex

<http://fr.wikipedia.org/wiki/Hex>

<http://www.micmaths.com/ateliers/jeu-hex.php>

Quarto

<http://fr.wikipedia.org/wiki/Quarto>

<http://mathenjeans.free.fr/amej/edition/actes/actespdf/94127129.pdf> (Maths en Jeans)

Sprouts

<http://fr.wikipedia.org/wiki/Sprouts>

<http://www.micmaths.com/ateliers/jeu-sprouts-01.php>