

LA « PROCÉDURE DU GOUGU »

Arnaud GAZAGNES

Résumé

La « procédure du *gougu* » est un procédé opérant sur des triangles rectangles : on cherche, à partir de données combinant les longueurs des côtés, à déterminer complètement les dimensions d'un triangle rectangle, sans revenir à la relation « de Pythagore ».

Introduction

Le chapitre 9 du *Jiuzhang Suanshu* (*Neuf chapitres de procédure de calcul*), comportant 24 problèmes, est appelé « *gougu* », littéralement « base – hauteur ». La technique du *gougu* met en scène des triangles rectangles. Du moins, pour être plus exact, dans les mathématiques chinoises, lorsque l'on parle du triangle rectangle, il s'agit de *résolutions de triangle rectangle*.

Il est à noter que jamais, dans ce Chapitre 9, le terme « triangle » n'est utilisé : le triangle rectangle est une configuration dont les côtés sont liés par une relation, la « procédure du *gou* et du *gu* » : le *gou* est la base, le « petit » côté du triangle rectangle, et le *gu* est la hauteur, le « grand » côté ; l'hypoténuse est appelée *xian*⁽¹⁾.

À partir d'un triangle rectangle (présenté sous des habillages variés), il s'agit en fait de déterminer les côtés inconnus à partir d'éléments connus.

Les unités de longueur utilisées sont telles que $1 \text{ zhang} = 10 \text{ chi} = 100 \text{ cun}$.

1 La « procédure du *gougu* »

Dans toute la suite de ce chapitre, a désigne la longueur du *gou*, b , celle du *gu* et c , celle de l'hypoténuse.

Avertissement :

- Toute formulation algébrique est anachronique vis-à-vis des mathématiciens chinois : cette liberté prise ici a pour but de faciliter la compréhension de la technique.
- De même, sauf mention contraire, la plupart des figures sont des reconstitutions actuelles fondées sur les textes de certains commentaires.

1.1 Divers cas d'énoncé

On possède deux des données suivantes, $a, b, c, a + b, b + c, a + c, b - a, c - a, c - b$ et l'on demande de trouver les inconnues parmi a, b ou c . Il y a donc 36 possibilités⁽²⁾ ; les redondantes sont toutefois éliminées pour faire apparaître 9 cas.

Six sont référencées dans le tableau suivant :

Type	Données	Inconnue(s)	Problème n°
1	a, b	c	1, 5
2	b, c	a	2, 3, 4
3	$a, c - b$ $b, c - a$	b, c a, c	6, 7, 8, 9, 10
4	$c, b - a$	a, b	11
5	$c - a, c - b$	a, b, c	12
6	$a, b + c$ $b, a + c$	b a	13

Nous reviendrons sur la symétrie des données du type 3 dans le problème 7, symétrie que l'on retrouve aussi dans les données du type 6.

On rencontrera aussi dans ce Chapitre 9 d'autres résolutions, comme les suivantes⁽³⁾ :

(1). Voir le paragraphe du premier chapitre parlant de l'équerre.

(2). Avec 2 éléments pris parmi 9, il y a $\binom{9}{2} = \frac{9!}{2!7!} = 36$ combinaisons.

(3). L désigne la longueur du carré inscrit dans le triangle rectangle et D le diamètre du cercle inscrit.

Type	Données	Inconnue(s)	Problème n°
7	$a, a + c = (7/3)b$	b, c	14
8	a, b	L	15
9	a, b	D	16

Plus tard, reprenant cette liste, les mathématiciens l'ont enrichie :

- tous les problèmes du *Ceyuan haijing* (*Miroir reflétant l'océan*) de LI Zhi (en 1248) tournent autour d'un triangle rectangle particulier,
- 101 des 284 problèmes du *Siyuan yujian* (*Miroir de jade des 4 origines*) (en 1303) traitent ce sujet,
- il y a, dans le *Meishi congshu jiyao* (en 1874), par exemple, l'énoncé où l'on donne la surface S du triangle et la somme des longueurs $a + b$ et l'on demande a et b , ...

1.2 Le problème 3

Ce problème énonce et explique la « la procédure du gougu » (le théorème « de Pythagore ») : c'est une des figures clés de la technique du *gougu*.

Suppose que le gu mesure 4 chi et l'hypoténuse, 5, combien mesure le gou ?

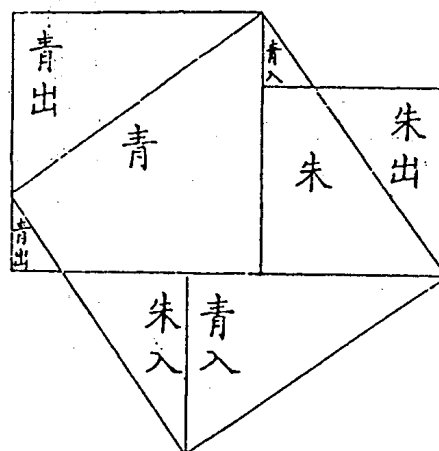
Procédure : Ajoute les carrés du gou et du gu, prends la racine carrée [de la somme], donnant l'hypoténuse. Ou le carré du gu est soustrait du carré de l'hypoténuse. La racine carrée⁽⁴⁾ du reste est le gou. De plus, le carré du gou est soustrait du carré de l'hypoténuse. La racine carrée du reste est le gu.

On donne $b = 4$ chi et $c = 5$ chi : on calcule $a = \sqrt{c^2 - b^2} = 3$ chi.

Liu Hui justifiait probablement cet énoncé par une figure en couleurs. Il n'a été conservé que le texte seul et, donc, la figure qui l'accompagnait est inconnue. Il n'en est pas moins clair que la démonstration de Liu Hui consiste à reconstituer matériellement le carré de l'hypoténuse en recouvrant celui-ci avec des pièces issues des deux carrés construits sur les côtés de l'angle droit. Cette démonstration repose sur le principe de « ce qui rentre vaut ce qui sort » (une sorte de « couper coller » de la figure). Dans son commentaire, Liu Hui explique comment prouver l'égalité des aires du carré de l'hypoténuse et de la somme de celles des carrés de la base et du côté.

Il existe de nombreuses façons de procéder conformes à cette idée, la figure ci-dessous en montre une (d'après Gu Guangang, *Jiushu cunqu* (*Les 9 Chapitres, gardiens de la tradition*) en 1892). Elle montre un triangle rectangle et, construits sur les côtés de l'angle droit, les deux carrés. Ils sont appelés *bleu* et *rouge* sur la figure car ils correspondent aux pièces du puzzle qui ont ces couleurs (seules les pièces qui vont être déplacées sont coloriées).

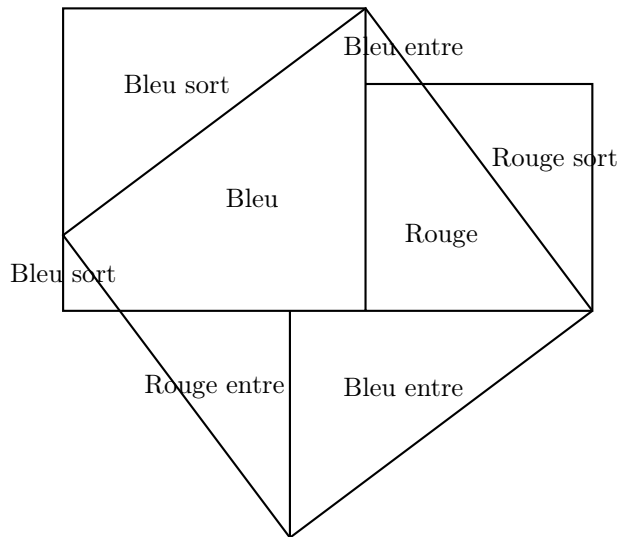
Dans un premier temps, le carré de l'hypoténuse est partiellement recouvert par les carrés *bleu* et *rouge*. Pour montrer que ces deux surfaces carrées recouvrent complètement et exactement le carré de l'hypoténuse (d'après le théorème de Pythagore), il suffit de bouger les pièces comme indiqué sur la figure ci-dessous.



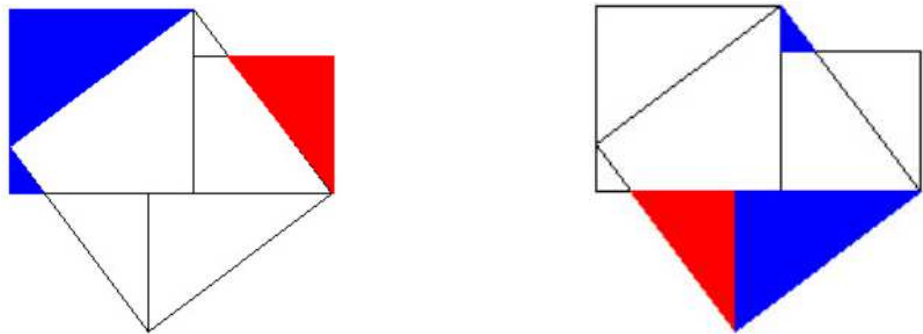
Traduction de l'illustration du texte chinois⁽⁵⁾ :

(4). Littéralement : « ouvre le carré ».

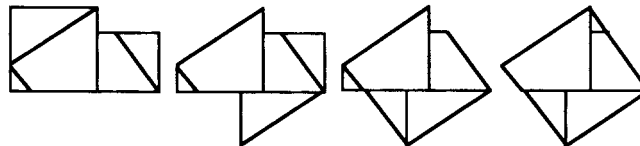
(5). L'illustration est tirée de l'ouvrage anglais de J. Cl. Martzloff, page 297.



Ce qui donne :



La manipulation se résume ainsi :



Ainsi, depuis l'époque des Han, les scientifiques chinois connaissaient-ils ce théorème « de Pythagore », d'abord constaté sur une équerre particulière (ou triangle rectangle particulier) (3-4-5) et ensuite appliqué sur une équerre (ou triangle rectangle) quelconque.

2 D'autres problèmes du Chapitre 9 du *JZSS*

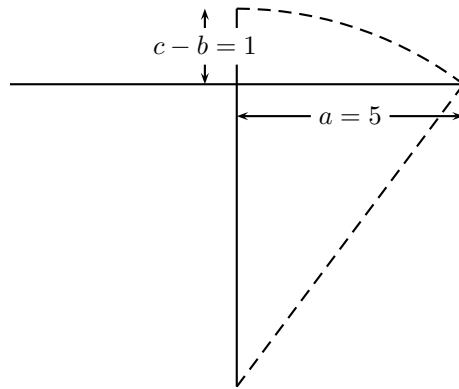
Dans chacun des problèmes présentés ci-dessous, une figure (qui n'est pas à l'échelle) illustre l'énoncé et, en particulier, met en évidence la donnée de la combinaison de a , b ou c .

2.1 Le problème 6

Au centre d'une mare carrée de côté 1 zhang pousse un roseau qui dépasse l'eau de 1 chi. On tire sur l'extrémité du roseau en direction de la berge, elle arrive exactement au niveau de l'eau. On demande quelles sont la profondeur de l'eau et la longueur du roseau. ⁽⁶⁾

a
 $c - b$

(6). Ce problème 6 est similaire au problème référencé BM 34568 n° 12 de la civilisation des Séleucides (dynastie hellénistique qui régna en Asie de -312 à -64), que les Chinois semblent avoir connue. Dans son énoncé et sa résolution, le calcul hexadécimal (base 60) est employé : $9 \times 9 = 81 = \textcircled{1} \times 60 + \textcircled{21}$ et est noté 1 ; 21 . « Un roseau est placé verticalement contre un mur. S'il descend de 3 coudées, il s'écarte de 9. Combien mesure le roseau ? le mur ? Puisque tu ne (les) sais pas, 3 fois 3 : 9 ; 9 fois 9 : 1 ; 21. [Ajoute] 9 à 1 ; 21 : (1;30). [Multiplie] 1 ; 30 [par] 0 ; 30 : 0 ; 45. L'inverse de 3 est 0 ; 20. [Multiplie] 0 ; 20 [par] 45 : 15, le roseau [...]. » On traduit l'énoncé par les conditions $a = 9$ et $c - b = 3$, ce qui donne une longueur d'échelle c égale à 15 coudées et une profondeur s égale à 12 coudées.



L'énoncé donne $a = 10 \div 2 = 5$ *chi* et $c - b = 1$ *chi*. On demanderait à nos élèves une résolution semblable à la suivante : « De $c - b = 1$, on tire $c = b + 1$. Avec $a^2 + b^2 = c^2$, il suffit de remplacer les valeurs de $a = 5$ et $c = b + 1$ pour obtenir l'équation du second degré $25 + b^2 = (b + 1)^2$, qui donne rapidement b (et donc c) ». Il y a, dans ce qui vient d'être écrit, tout un passage algébrique que les mathématiciens ne connaissaient pas.

La méthode de résolution pour ce problème est la suivante (les lettres entre parenthèses appellent des commentaires que Liu Hui a écrits, ils sont placés après les résultats) :

Procédure : élève au carré la moitié du côté de la mare (i) . De cela soustrais le carré de 1 *chi* (ii) , la hauteur au-dessus de l'eau. Divise le reste par deux fois la hauteur au-dessus de l'eau pour obtenir la profondeur de l'eau (iii) . La somme du résultat et de la hauteur au-dessus de l'eau est la longueur du roseau (iv) .

(i) Ici prends la moitié du côté de la mare, 5 *chi*, comme gou, la profondeur de l'eau comme le gu et la longueur du roseau comme hypoténuse. Obtiens le gu et l'hypoténuse à partir du gou et de la différence entre le gu et l'hypoténuse. Par conséquent, élève au carré le gou pour l'aire du gnomon. ⁽⁷⁾

(ii) La hauteur au-dessus de l'eau est la différence entre le gu et l'hypoténuse. Soustrais le carré de cette différence de celle de l'aire du gnomon : prends le reste.

(iii) Considère comme gu la différence entre la largeur du gnomon et la profondeur de l'eau. Par conséquent, construis [un rectangle] avec une largeur de 2 *chi*, le double de la hauteur au-dessus de l'eau. ⁽⁸⁾

(iv) Le roseau dépasse l'eau de 1 *chi*, alors connaissant la profondeur de l'eau, on les additionne pour avoir la longueur du roseau.

Nous pouvons donc reformuler et ainsi résoudre le problème comme tel :

$$\text{Profondeur} = b = \frac{a^2 - (c - b)^2}{2(c - b)} = \frac{5^2 - 1^2}{2 \times 1} = 12 \text{ chi}$$

$$\text{Longueur du roseau} = c = b + (c - b) = 12 + 1 = 13 \text{ chi}$$

Dans ce problème, il a été trouvé le triplet (5, 12, 13) : c'est un triplet dit « pythagoricien » ; on appelle ainsi la donnée de trois nombres entiers u , v et w vérifiant la relation $u^2 + v^2 = w^2$. On rencontre les huit triplets ci-dessous dans le Chapitre 9, quitte à utiliser une subdivision métrique ou un coefficient multiplicateur commun sur un résultat fractionnaire pour les obtenir :

Triplet	Problème
(3, 4, 5)	1, 2, 3, 12
(5, 12, 13)	6, 9, 15
(7, 24, 25)	4, 11
(8, 15, 17)	16, 21

Triplet	Problème
(20, 21, 29)	5, 14
(20, 99, 101)	8, 10
(48, 55, 73)	7
(60, 91, 109)	13

Toutefois, il n'est mentionné nulle part dans le *JZSS* une étude générale des triplets pythagoriciens, c'est-à-dire la recherche explicite de leur génération.

2.2 Le problème 8

L'énoncé suivant donne a et $c - b$, tout comme celui du problème 6, et l'on cherche c . C'est-à-dire que l'on attendrait la même démarche. Sa résolution montre qu'il en est tout autrement : la méthode de résolution

a
 $c - b$

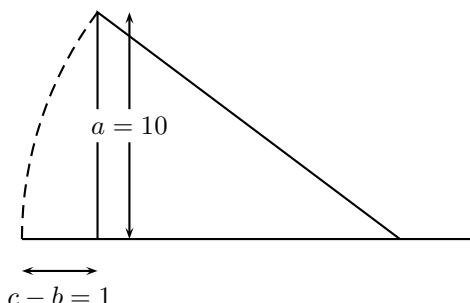
(7). Liu Hui utilise le fait que le gnomon (soit le carré de côté c privé du carré de côté b d'aire $c^2 - b^2$ ($= a^2$ d'après le théorème de Pythagore) a la même aire que le rectangle dont les côtés mesurent $c + b$ et $c - b$.

(8). Liu Hui a prouvé géométriquement la méthode.

de tel problème n'est pas utilisée dans la résolution de tel autre.

Suppose un mur haut de 1 zhang. Un arbre (ou une perche en bois) s'appuie contre ce mur de telle sorte que son extrémité coïncide avec le haut du mur. Si l'on recule de 1 chi en tirant l'arbre, celui-ci touche le sol. Combien mesure l'arbre ?

Procédure : Multiplie 10 chi par eux-mêmes, divise par le pas en retrait, ajoute le pas en retrait à ce qui a été obtenu et divise le résultat par 2, ce qui est la hauteur de l'arbre.

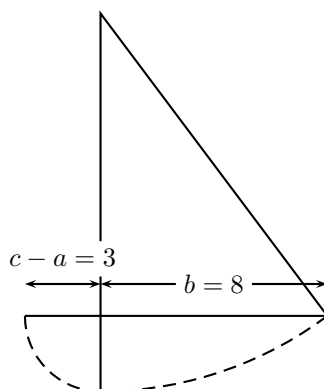


Des données $c - b = 1$ chi et $a = 1$ zhang, on peut calculer la hauteur cherchée :

$$\text{Hauteur} = c = \frac{\frac{a^2}{c-b} + c - b}{2} = \frac{\frac{10^2}{1} + 1}{2} = 50 + \frac{1}{2} \text{ chi} = 5 \text{ zhang } 5 \text{ cun}$$

2.3 Le problème 7

Une corde qui est attachée au sommet d'un arbre vertical dépasse de 3 chi la longueur de cet arbre. En tirant la corde à son maximum pour que son extrémité touche juste le sol, on s'écarte exactement de 8 chi du pied de l'arbre. Quelle est la longueur de la corde ?



L'énoncé donne $c - a = 3$ chi et $b = 8$ chi. A priori, si le calculateur sait résoudre le problème correspondant à a et $c - b$, il n'a pas besoin de refaire de nouveaux calculs pour le problème dont les données sont b et $c - a$, puisqu'elles sont symétriques, c'est-à-dire que les deux côtés de l'angle droit jouent le même rôle. Mais, à cette époque chinoise, les choses ne se déroulaient pas de cette façon : en effet, pour un contemporain, les deux côtés de l'angle droit portent, d'un point de vue littéral, des noms différents, et (donc) l'un et l'autre ne sont pas interchangeables. D'où une nouvelle technique pour la résolution :

Élève au carré la distance depuis le pied (de l'arbre). Divise par la longueur de l'extrémité reposant à terre. Ajoute le résultat à la longueur de l'extrémité. Divise par 2 : c'est la longueur de la corde.

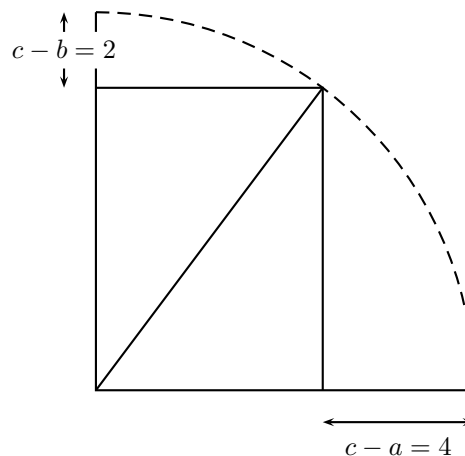
$$\text{Longueur} = c = \frac{\frac{b^2}{c-a} + c - a}{2} = \frac{\frac{64}{3} + 3}{2} = \frac{21 + \frac{1}{3} + 3}{2} = 12 + \frac{1}{6} \text{ chi }^{(9)}$$

2.4 Le problème 12

Soit une porte dont on ne connaît ni la hauteur ni la largeur, un bâton dont on ignore la longueur. On le place en largeur, le dépassement est de 4 chi ; on le place en hauteur, le dépassement est de 2 chi ; on le place en

(9). Tout nombre rationnel est écrit comme la somme d'un entier et d'une fraction plus petite que 1.

diagonale, le dépassement est nul. On demande combien font la hauteur et la largeur de la porte, ainsi que la longueur du bâton.



Procédure : Multiplie les deux surplus ensemble ; double et extrais la racine carrée. Ce résultat plus le surplus par rapport à la hauteur est la largeur. Ce résultat plus le surplus par rapport à la largeur est la hauteur. Ce résultat plus les deux surplus est la diagonale de la porte.

Données : $c - a = 4$ *chi* et $c - b = 2$ *chi*

$$\text{Largeur} = a = \sqrt{2(c-a)(c-b)} + (c-b) = \sqrt{2 \times 4 \times 2} + 2 = 6 \text{ chi}$$

$$\text{Hauteur} = b = \sqrt{2(c-a)(c-b)} + (c-a) = \sqrt{2 \times 4 \times 2} + 4 = 8 \text{ chi}$$

$$\text{Longueur} = c = \sqrt{2(c-a)(c-b)} + (c-a) + (c-b) = \sqrt{2 \times 4 \times 2} + 4 + 2 = 10 \text{ chi}$$

On remarquera que c est calculé à partir de $c - a$ et $c - b$ (donnés) et non pas à partir de $c - b$ (donné) et b (calculé) avec $c = (c - b) + b$.

2.5 Le problème 11

Suppose que la hauteur d'une porte soit 6 *chi* 8 *cun* plus grande que sa largeur et que les coins opposés soient distants de 1 *zhang*. Détermine la hauteur et la largeur de la porte.

c
 $b - a$

Les données sont $c = 100$ *cun* et $b - a = 68$ *cun*.

La procédure accompagnant le texte est la suivante :

Multiplie 1 *zhang* par lui-même, ce qui donne le dividende. Prends la moitié de ce dont l'un dépasse l'autre ⁽¹⁰⁾, multiplie-la par elle-même, double le résultat et soustrais au dividende. Prends la moitié de ce reste et prends-en la racine carrée. Soustrais de ce résultat la moitié du dépassement : cela donne la largeur de la porte. Ajoute la moitié du dépassement : cela donne la longueur de la porte.

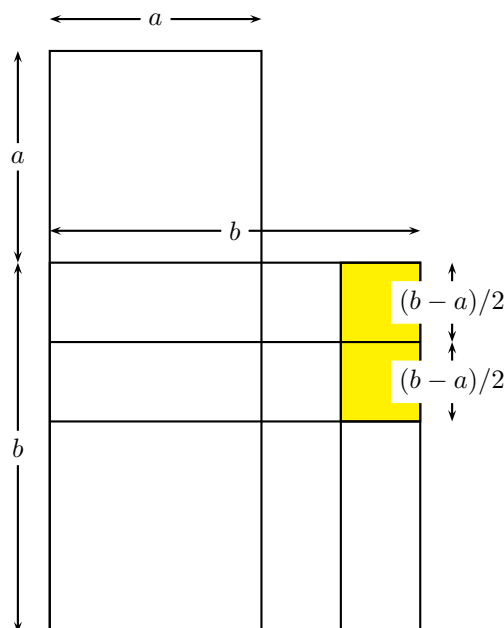
Ce problème se résout en « posant une figure » plutôt qu'en « posant des équations ». YANG Hui commente (vers 1261) la résolution de la façon suivante :

La figure consiste en deux carrés construits sur les côtés de l'angle droit de la porte posés (physiquement) l'un sur l'autre (voir figure ci-dessous). Sa surface totale est $a^2 + b^2$, soit c^2 (d'après le théorème de Pythagore).

On observe ensuite que le carré de côté b est découpé en :

- quatre rectangles de côtés a et $\frac{b-a}{2}$,
- un carré de côté a ,
- quatre petits carrés ayant chacun pour côté $\frac{b-a}{2}$ la demi différence des côtés des carrés (et dont deux sont appelés *jaunes*).

(10). C'est-à-dire 6 *chi* 8 *cun*.



Chaque morceau du grand carré de côté b admet son double dans la figure entière et il y a en plus les deux carrés jaunes. Ceci nous permet de comprendre le raisonnement que fait le mathématicien chinois.

Si l'on ôte du grand carré le gnomon (c'est-à-dire l'équerre) qui le borde sur le dessus et la droite, il reste un petit carré dont, d'une part, les dimensions valent à la fois $a + \frac{b-a}{2}$ ⁽¹¹⁾ et $b - \frac{b-a}{2}$ et dont, d'autre part, l'aire vaut la moitié de l'aire totale des deux carrés a^2 et b^2 diminuée de l'aire des 2 carrés jaunes

égale à $2 \left(\frac{b-a}{2} \right)^2$. Par conséquent, $\frac{c^2 - 2 \left(\frac{b-a}{2} \right)^2}{2}$ est égal à $\left(a + \frac{b-a}{2} \right)^2$ et à $\left(b - \frac{b-a}{2} \right)^2$.

On obtient donc ainsi directement la solution du texte original (où sont connus c et $b-a$) sans effectuer la moindre résolution d'équation :

$$\text{Largeur} = a = \sqrt{\frac{c^2 - 2 \left(\frac{b-a}{2} \right)^2}{2}} - \frac{b-a}{2} = \sqrt{\frac{100^2 - 2 \left(\frac{68}{2} \right)^2}{2}} - \frac{68}{2} = 28 \text{ cun}$$

$$\text{Hauteur} = b = \sqrt{\frac{c^2 - 2 \left(\frac{b-a}{2} \right)^2}{2}} + \frac{b-a}{2} = \sqrt{\frac{100^2 - 2 \left(\frac{68}{2} \right)^2}{2}} + \frac{68}{2} = 96 \text{ cun}$$

3 Figures inscrites

La résolution du problème repose sur le principe *chu ru xiang bu* (« principe de rapiéçage ») dont l'énoncé est le suivant :

- si l'on déplace une figure plane, son aire ne varie pas ;
- si l'on coupe une figure en un certain nombre de figures composantes, la somme des aires de ces parties est égale à l'aire de la figure initiale.

3.1 Le problème 15 : carré inscrit

Dans un triangle rectangle (donné), il est demandé de calculer, en fonction de la longueur des côtés de l'angle droit du triangle, la longueur du carré inscrit (de telle sorte que l'un de ses sommets soit le sommet de l'angle droit du triangle et les trois autres sommets soient sur les côtés du triangle).

Supposons que la base (*gou*) soit égale à 5 bu et la hauteur (*gou*), à 12 bu. On demande combien mesure le côté du carré inscrit à l'intérieur de la base.

(11). Il est tentant de simplifier en $\frac{a+b}{2}$, mais cette réduction algébrique est contraire à l'esprit de l'époque... D'autant plus que l'on perdrait la donnée $b-a$.

Réponse : Le côté mesure $3 + \frac{9}{17}$ bu.

Procédure : Le produit du *gou* et du *gu* est le dividende, la somme du *gou* et du *gu* est le diviseur. Divise, c'est le côté du carré.

Les commentaires de ce problème qui suivent sont de Liu Hui. Nous devons à un lettré du XVIII^e siècle, Li Huang, la reconstitution des figures manquantes dans son *Jiu Zhang Suan Shu Xicao Tushuo*⁽¹²⁾. Il en est de même pour le problème 16.

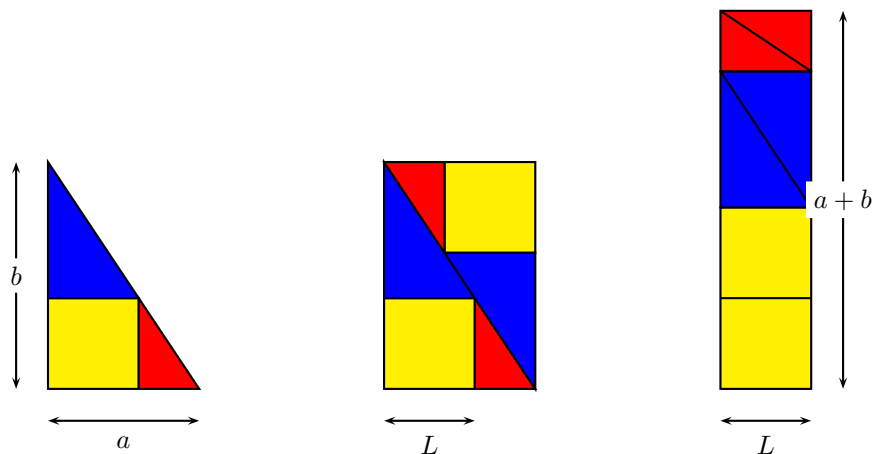
Commentaire de Liu Hui :

Le produit de la base (*gou*) par la hauteur (*gu*) contient 3 paires de figures, rouges, azur et jaunes. Place les figures jaunes au pied et arrange les figures rouges et azur pour en faire des rectangles au sommet, avec le côté du carré jaune central comme largeur et la somme de la base et de la hauteur comme la longueur. C'est pourquoi pour diviseur on additionne la base et la hauteur.

Cela signifie de bouger les pièces rouges, jaunes et azur de telle façon à reconstruire, en prenant une paire de chacune des trois pièces, un rectangle dont la largeur vaille le côté du carré jaune.

Comme l'indique Liu Hui, la méthode de la solution implique un rectangle dont l'aire peut être décrite de deux façons différentes. Pour cela, il réarrange les pièces résultant d'un découpage de deux exemplaires identiques du triangle donné (comme indiqué sur la figure). Il crée ainsi un rectangle dont l'aire est égale, d'une part, à ab , puisque ses dimensions sont les longueurs des côtés de l'angle droit, et, d'autre part, à $(a+b)L$ ⁽¹³⁾, puisque ce rectangle a pour largeur L (la longueur du côté du carré) et pour longueur $a+b$.

D'où $L = \frac{ab}{a+b}$.



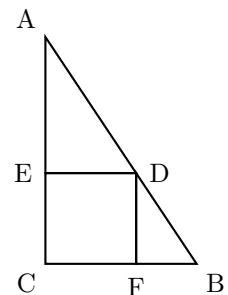
Il propose aussi une autre preuve, basée sur les triangles semblables, dont l'esprit est le suivant :

Les triangles AED, DFB et ACB sont semblables.

Dans le petit triangle rectangle AED construit sur la hauteur *gu* de ACB, $AE + ED = AE + EC = b$ et (de même) dans DFB construit sur la base *gou* de ACB, $DF + FB = a$.

Donc on obtient $\frac{L}{a} = \frac{a}{a+b}$ ou $\frac{L}{b} = \frac{b}{a+b}$.

D'où le résultat.



3.2 Le problème 16 : cercle inscrit

Dans un triangle rectangle (donné), il est demandé de calculer le diamètre D du cercle inscrit (le cercle est tangent à chacun des trois côtés du triangle).

Suppose que la base (*gou*) vaille 8 bu et la hauteur (*gu*), 15 bu. On demande combien mesure le diamètre du cercle inscrit.

Réponse : 6 bu.

(12). *Solutions détaillées (des problèmes) du Jiu Zhang Suan Shu avec figures et explications*

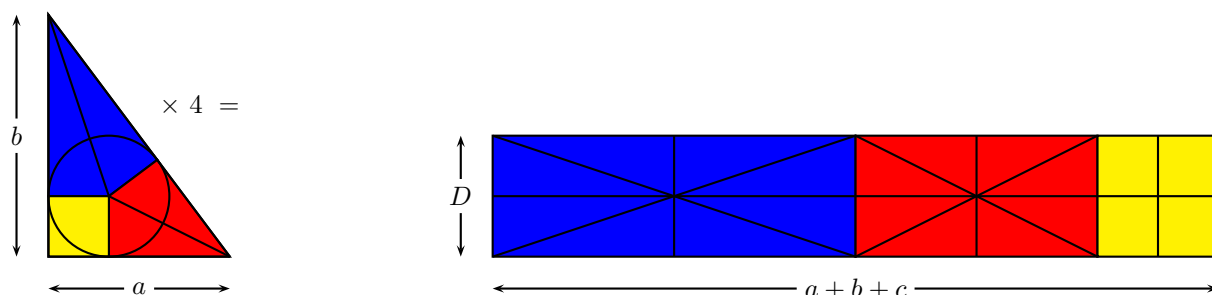
(13). Par souci de cohérence avec les notations du chapitre sur la méthode du *gougu*, la lettre L (initiale de « longueur ») a été préférée à la lettre c (initiale habituelle de « côté »).

Procédure : 8 bu est le *gou*, 15 bu est le *gu*. Trouve l'hypoténuse. Ajoute les trois ensemble : c'est le diviseur. Prends le *gou* pour le multiplier avec le *gu*. Double : c'est le dividende. Divise : c'est le diamètre. ⁽¹⁴⁾

La règle demande de calculer d'abord la longueur de l'hypoténuse : $c = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$ bu

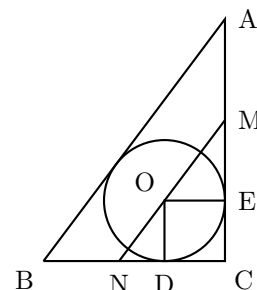
Elle permet alors de calculer le diamètre : $D = \frac{2ab}{a+b+c} = \frac{2 \times 8 \times 15}{2+8+15} = 6$ bu

La figure associée est la suivante.



Liu Hui obtient aussi ce résultat avec un raisonnement purement géométrique (avec la similitude de triangles). L'idée est la suivante :

1. Les triangles DNO et EMO sont semblables au triangle ABC,
2. chacun d'eux a un côté qui est le rayon du cercle,
3. la somme des longueurs de leurs côtés sont respectivement a et b ,
4. avec des calculs de proportions (basés sur la similitude), on obtient le résultat.



Il construit la droite (MN) qui est la parallèle à l'hypoténuse (AB) passant par le centre O du cercle inscrit.

Soit r le rayon du cercle inscrit.

Par similitude des triangles ABC et OND, on a $a : BC :: AC :: AB = ND :: OD :: NO$ soit encore : $a :: b :: c = DN :: r :: ON$.

Or $NB = ON$. (LIU Hui ne l'a pas démontré.) ⁽¹⁵⁾

Donc $\frac{b}{a+b+c} = \frac{r}{DN+r+ON} = \frac{r}{CN+ON} = \frac{r}{CN+NB} = \frac{r}{a}$.

Donc $r = \frac{ab}{a+b+c}$ et $d = 2r = \frac{2ab}{a+b+c}$

On notera que Liu Hui propose aussi d'autres relations permettant de calculer D :

- $D = a - (c - b)$ ⁽¹⁶⁾
- $D = b - (c - a)$
- $D = (b + a) - c$
- $D^2 = 2(c - a)(c - b)$

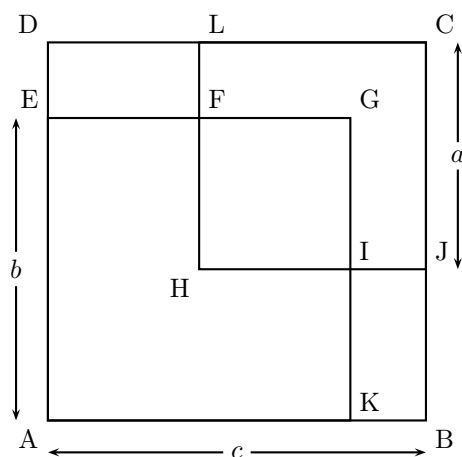
Ce dernier résultat a été montré par Huang Tai Sheng dans son *Ce Yuan Hai Jing Zhui Jie* de la façon suivante.

Dans la figure ci-dessous, ABCD est un carré avec $AB = c$; de plus, $AE = b$ et $CJ = a$.

(14). Le double du produit des longueurs des deux côtés est le quadruple de la moitié de ce produit, qui est exactement l'aire du triangle. Autrement dit, le diamètre du cercle inscrit est égal à 4 fois l'aire du triangle rectangle divisé par son périmètre.

(15). En effet, soit α une mesure de l'angle \widehat{OBN} . (OB) est bissectrice de l'angle \widehat{ABC} car O, étant le centre du cercle inscrit, est le point d'intersection des bissectrices. Les droites (MN) et (AB) étant parallèles, on a : $\widehat{ONC} = \widehat{ABC} = 2\alpha$. Soit β une mesure de l'angle \widehat{BON} . On a les équations $(E_1) \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ (avec la somme des angles du triangle OBN) et $(E_2) 2\alpha + \gamma = 180^\circ$ (avec l'angle plat \widehat{CNB}) qui donnent, en soustrayant (E_1) à (E_2) , $\alpha - \beta = 0$ puis $\alpha = \beta$: le triangle ONB est donc isocèle de sommet N. Donc $ON = NB$.

(16). Les deux données sont ici a et la différence $c - b$, c'est-à-dire que l'on ne connaît ni c ni b mais seulement leur différence.



On construit le carré FGIH d'aire D^2 (donc $FH = D$).

De plus, on a : $FH = CJ - DE = CJ - (AD - AE) = CJ - (AB - AE) = a - (c - b)$.

Le carré ABCD est constitué du carré AEGK ajouté au polygone DCBKGE. L'aire de ce dernier est donc égale à $c^2 - b^2$, soit a^2 , d'après le théorème de Pythagore.

Cette aire est aussi celle du carré dont une diagonale est [CH].

On a de plus l'égalité des aires des rectangles de diagonales [DF] et [IB].

On utilise aussi le « principe de rapiécage ».

Finalement, l'aire du carré FGIH est donc égale à l'aire du rectangle de diagonale [DF].

On obtient alors : $D^2 = 2 DE \times EF = 2(c - a)(c - b)$.

Bibliographie

(Sont cités pour le lecteur les textes et ouvrages en langues occidentales)

GRANET, M., *La civilisation chinoise*, Coll. « L'évolution de l'humanité », Albin Michel, 1968

LIBBRECHT, U., *The Chinese Ta-yen Rule : a Comparative Study*, *Orientalia Lovaniensa* (Louvain), 1972

LIU, D., *Nombres et outils de calcul et expressions mathématiques en Chine ancienne*, in *L'Océan Indien au carrefour des mathématiques arabes, chinoises, européennes et indiennes*, Actes du Colloque, 3-7 novembre 1997, I.U.F.M. de La Réunion, pp 161-177, 1998

MARTZLOFF, J.-Cl., *Histoire des mathématiques chinoises*, Masson, 1983

MARTZLOFF, J.-Cl., *A History of Chinese Mathematics*, Springer, 1997

MIKAMI, Y., *The development of mathematics in China and Japan*, Chelsea Publishry Compagny New York, 1913

NEEDHAM, J., *La science chinoise et l'Occident*, Ed. du Seuil, 1973

SCHRIMPF, R., *La collection mathématique Souan King Che Chou, Contribution à l'histoire des mathématiques chinoises des origines au VIIe siècle de notre ère*, Thèse, Rennes, 1963

YABUUTI, K., *Une histoire des mathématiques chinoises*, Belin Sciences, 2000

YAMASAKI, Y., *History of instrumental Multiplication and Division in China – from the Reckoning-blocks to the Abacus*

Ce document a été écrit à partir de la brochure *Promenades mathématiques en Chine Ancienne*, écrite par Arnaud GAZAGNES et publiée par l'IREM de Reims en 2005 (ISBN : 2-910076-12-1).