Séance du 19 juin 2013

Notions étudiées : Calcul matriciel, rang d'une matrice, image et noyau d'une matrice, valeurs propres, vecteurs propres, polynôme caractéristique, polynôme annulateur, polynôme minimal.

Exercice 1 On pose $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Déterminer le rang de J, la dimension de $\ker J$ et une base de $\operatorname{Im} J$
2. Déterminer J^k, $k \in \mathbb{N}$

Exercice 2 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice représentant f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique (e_1, e_2, e_3).

1. Pour $i = 1, 2, 3$, calculer $f^2(e_i)$ et $f^3(e_i)$
2. En déduire A^2 et A^3
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner une expression de $(I_3 + A)^n$ en fonction de n
4. Même question pour $(I_3 - A)^n$ et $(3I_3 - A)^n$

Exercice 3 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui a pour matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ notée (e_1, e_2, e_3).

1. Montrer que $f^2(e_1) = f(e_2) = 0$ et que $f^2(e_3) = f(e_3)$
2. En déduire A^2
3. Prouver que $A^3 = A^2$
4. Donner une base de $\operatorname{Im} M$ et $\ker M$

Exercice 4 Changement de bases

Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans les bases canoniques est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

On appelle (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et (f_1, f_2) celle de $\mathbb{R}^2$. On pose

$$e_1' = e_2 + e_3,\ e_2' = e_3 + e_1,\ e_3' = e_1 + e_2 \text{ et } f_1' = \frac{1}{2}(f_1 + f_2),\ f_2' = \frac{1}{2}(f_1 - f_2)$$

1. Montrer que (e_1', e_2', e_3') est une base de $\mathbb{R}^3$ et que (f_1', f_2') une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Quelle est la matrice de u dans ces nouvelles bases ?

Exercice 5 Changement de bases

On introduit les vecteurs dans $E = \mathbb{R}^5$ et la matrice suivante :

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ f_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ f_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \text{ et } A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

On désignera pas $u : E \to E$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est A.

1. Soit F (resp G) le sous-espace de E engendré par f_1, f_2 (resp f_3, f_4). Vérifier que F et G sont en somme directe.
2. Montrer que f_5 n'appartient pas à $F + G$; en déduire que si l'on note H la droite engendrée par f_5, alors $E = F \oplus G \oplus H$.
3. Écrire P la matrice de passage de la base canonique vers la base $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$.
4. Écrire A' la matrice de u dans la base $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$. On pourra utiliser un logiciel de calcul formel.
5. Lire sur la matrice A' le fait que F, G, H sont stables par u.

Exercice 6 Inverses de matrices

1. Déterminer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en fonction de A et I_2
2. Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -4 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ Déterminer un polynôme annulateur de ces matrices et en déduire A^{-1}. On pourra utiliser un logiciel de calcul formel pour éviter des calculs fastidieux.
3. Généraliser les résultats précédents en montrant que pour toute matrice A inversible, $A^{-1} \in \mathbb{K}[A]$

Exercice 7 Puissances de matrice

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer M^{100} puis M^n, $n \in \mathbb{Z}$. On pourra utiliser la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 8 Puissance de matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer deux suites de réels (a_n) et (b_n) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = a_n I + b_n A$$

On pourra utiliser les résultats de l'exercice 1.

Exercice 9 Puissance de matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 6 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $(x-1)^2(x-2)$ annule A.

2. Déterminer pour $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de n.

Exercice 10 Matrice compagnon d'un polynôme

Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n$ un polynôme. On appelle matrice compagnon de P, la matrice C_P représentant l'endomorphisme suivant f dans la base canonique $(e_0, e_1 \ldots e_{n-1})$:

$$\begin{cases} f(e_i) = e_{i+1} \quad \forall i < n-1 \\ f(e_{n-1}) = -(a_0 e_0 + a_1 e_1 + \ldots + a_{n-1} e_{n-1}) \end{cases}$$

1. Écrire la matrice compagnon de $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n$

2. Prouver que quel que soit le polynôme P, le polynôme caractéristique de C_P vérifie $\chi_{C_P}(X) = \det(XI_n - C) = P(X)$.

3. a) Prouver que le polynôme minimal de C_P vérifie $\mu_{C_P}(X) = P(X)$. On pourra montrer que la famille $(E_0, C_P E_0, \ldots, C_P^{n-1} E_0)$ est libre où E_0 est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

   b) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que C_P soit diagonalisable.

4. a) Soit $P(x) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + X^3$ un polynôme et soit λ une racine de P. Vérifier que $\lambda^3 = -a_0 - a1\lambda - a_2\lambda^2$ et montrer que $(1, \lambda, \lambda^2)$ est un vecteur propre de la *transposée* de la matrice compagnon de P.[1]

   b) Déduire des questions précédentes que ${}^tC_P$ avec $P(X) = -12 + 19X - 8X^2 + X^3$ est diagonalisable et donner une base formée de vecteurs propres.

5. Dans le cas où ${}^tC_P$ est diagonalisable, déterminer une base des vecteurs propres de ${}^tC$. En déduire une matrice de passage permettant de diagonaliser C_P On ne cherchera pas à la calculer.

[1] Dans certains ouvrages, on définit la matrice compagnon du polynôme par cette dernière matrice

Correction 1

1. On pose $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. On a rang $J = 1$, $dim \ker J = n - 1$ et $\operatorname{Im} J =< \varepsilon >$.

2. Soit f l'endomorphisme représenté par J, on a pour tout i, $f(e_i) = \varepsilon$ et $f(\varepsilon) = n\varepsilon$ d'où $J^k = n^{k-1} J$ pour $k > 0$

Correction 2

2. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. $(I_3 + A)^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \binom{n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. $(I_3 - A)^n = \begin{pmatrix} 1 & -n & \binom{n}{2} \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $(3I_3 - A)^n = \begin{pmatrix} 3^n & -3^{n-1}n & 3^{n-2}\binom{n}{2} \\ 0 & 3^n & -3^{n-1}n \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$

Correction 3

4. $\operatorname{Im} M =< e_2, e_3 >$ et $\ker M =< e_2 >$

Correction 4

1. Avec des notations évidentes : $P = P_{\mathcal{E},\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $Q = P_{\mathcal{F},\mathcal{F}'} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ sont inversibles donc (e'_1, e'_2, e'_3) et (f'_1, f'_2) sont bien des bases.

2. $A' = \mathcal{M}at(u)_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'} = Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

Correction 5

1. $F \cap G = \{O_{\mathbb{R}^5}\}$

2. $(F + G) \cap H = \{O_{\mathbb{R}^5}\}$ donc $F \oplus G \oplus H$ et on conclue avec les dimensions

3. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4. $A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Correction 6

1. $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}(\mathrm{tr}(A)I_2 - A)$

2. $$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{2}A^2 + A - \frac{1}{2}I_3 \\ B^{-1} &= \frac{1}{24}(B^2 - 6B - 4I_3) \\ C^{-1} &= -\frac{1}{6}(C^2 - 3C + 6I_3) \end{aligned}$$

3. Si A est inversible, alors il existe $P(X) = a_p X^p + \ldots + a_0$ qui annule A avec $a_0 \neq 0$ d'où le résultat.

Correction 7 $M = I_2 + 4J$ et $J^2 = 0$ D'où

$$\forall n > 0, \quad M^n = I_2 + 4nJ$$

De $M^2 = I_2 + 8J = 2M - I_2$, on trouve $M^{-1} = 2I_2 - M = I_2 - 4J$ et

$$\forall n > 0, \quad M^{-n} = I_2 - 4nJ$$

Correction 8

- On trouve à l'aide de la matrice J de l'exercice 1 que $A^2 = 7A - 10I_3$
- Relation de récurrence : $a_{n+1} = -10b_n$ et $b_{n+1} = a_n + 7b_n = 7b_n - 10b_{n-1}$
- On résout l'équation caractéristique : $b_n = \alpha 2^n + \beta 5^n$ de $b_0 = 0$ et $b_1 = 1$ on déduit

$$b_n = \frac{1}{3}(5^n - 2^n) \text{ et } a_n = \frac{10}{3}(2^{n-1} - 5^{n-1}) \text{ avec } a_0 = 1$$

Correction 9

1. $\chi_A(x) = (x-1)^2(x-2)$ annule A

2. $\mathrm{rang}(I_3 - A) = 1$ donc $\dim \ker(I_3 - A) = 2$ et A est diagonalisable en $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   Une matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ d'où

$$M^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{n+2} - 3 & -2^{n+1} + 2 & 2^{n+1} - 2 \\ 3.2^{n+1} - 6 & -3.2^n + 4 & 3.2^n - 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction 10

1. $C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$

2. On opère selon les lignes : $L_0 \leftarrow L_0 + XL_1 + X^2L2 + \ldots + X^{n-1}L_{n-1}$

3. a) Si C_P représente f, on a $f(e_0) = e_1$ et $f^k(e_0) = e_k$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$ donc $(f^k(e_0))_{0\leqslant k\leqslant n-1} = (e_i)_{0\leqslant i\leqslant n-1}$ est libre.
   Soit Q un polynôme annulateur de C_p de degré d. Comme $Q(f) = 0$ on doit avoir $Q(f)(e_0) = 0$ d'où $d \geqslant n$. Comme P annule C_p on a bien $\mu(C_P) = P$

   b) C_P est diagonalisable si et seulement si P est scindé à racine simple.

   a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$

   b) $P(X) = (X-4)(X-3)(X-1)$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 16 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

4. Soit $P(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$, alors la matrice de passage permettant de diagonaliser ${}^tC_P$ est $W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$ (W est la transposée de la matrice de Vandermonde des λ_i). La base diagonalisant C_P est ${}^tW^{-1}$ (ou l'inverse de la matrice de Vandermonde.)