Séries entières

Exercice 1 : rayon de convergence d'une série entière et comportement asymptotique de sa somme

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$.

1. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$ est infini. Pour x réel, on pose
$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n.$$
2. Montrer que : $\forall x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[,\ f(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} g(tx)\, \mathrm{d}t$.
3. On suppose que la suite (a_n) possède une limite L non nulle dans $\mathbf{R}$. Montrer qu'alors $g(x) \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{L}\mathrm{e}^x$.

Exercice 2 : un développement en série entière

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x \sin x$ est développable en série entière et préciser le rayon de convergence de son développement en série entière.
2. En déduire, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la relation : $\dfrac{(\sqrt{2})^n \sin \frac{n\pi}{4}}{n!} = \displaystyle\sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!(n-2k-1)!}$.

Exercice 3 : un autre développement en série entière

Pour tout x de $\mathbf{R}$, on pose : $h(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\, \mathrm{d}t$

1. Montrer que h est solution de l'équation différentielle $y' + 2xy = 1$.
2. Prouver que h est développable en série entière et trouver son développement.

Exercice 4 : une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ qui n'est pas développable en série entière

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.
2. Déterminer la série de Taylor de f en 0.
3. Montrer qu'il n'existe aucun intervalle ouvert contenant 0 sur lequel f coïncide avec la somme de sa série de Taylor.

Exercice 5 : formule de Taylor et développement en série entière

Soit I un intervalle ouvert et a un élément de I et $f : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$. On suppose qu'il existe deux réels strictement positifs r et M tels que, pour tout x dans I et tout n dans $\mathbf{N}$,
$$|f^{(n)}(x)| \leqslant \mathrm{M} n!\, r^n.$$

1. Montrer que le rayon de convergence de la série de Taylor de f en a, $\sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!} x^n$, est strictement positif.
2. Montrer qu'il existe $\mathrm{R} > 0$ tel que, pour tout x vérifiant $|x| < \mathrm{R}$, $f(a+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} x^n$.

Exercice 6 : un théorème de Bernstein

Soit un nombre réel strictement positif et $f\ :]-a,a[\to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$. On suppose que pour tout entier $k\in\mathbf{N}$ et tout réel $x\in]-a,a[$, on a

$$f^{(2k)}(x)\geqslant 0.$$

Le but de l'exercice est de montrer que f est somme de sa série de Taylor en 0 sur $]-a,a[$.

1. Dans cette question, on suppose de plus que f est paire. On se donne alors un réel x dans $[0,a[$ et pose, pour $n\in\mathbf{N}$,
$$\mathrm{R}_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$
   (a) Montrer que, pour tout $n\in\mathbf{N}$, $\mathrm{R}_{2n}(x)\leqslant f(x)$ puis que $\mathrm{R}_{2n}(x)=\dfrac{x^{2n+1}}{(2n)!}\displaystyle\int_0^1(1-u)^{2n}f^{(2n+1)}(xu)\,\mathrm{d}u$.

   (b) En déduire que, pour tout $n\in\mathbf{N}$, $\mathrm{R}_{2n}(x)\geqslant 0$. (Utiliser la croissance de $f^{(2n+1)}$).

   (c) Montrer que si $x<y<a$ alors, pour tout $n\in\mathbf{N}$, $\mathrm{R}_{2n}(x)\leqslant\dfrac{x^{2n+1}}{y^{2n+1}}\mathrm{R}_{2n}(y)$.

   (d) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{R}_{2n}(x)=0$ puis que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{R}_{2n+1}(x)=0$.

   (e) Montrer enfin que f est somme de sa série de Taylor en 0 sur $[0,a[$ puis sur $]-a,a[$.

2. Dans cette question on ne suppose plus que f est paire et on introduit la fonction g définie sur $]-a,a[$ par $g(x)=f(x)+f(-x)$. On se donne un réel x dans $]-a,a[$ puis on pose :
$$\mathrm{R}_n(g,x)=g(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$
   (a) Justifier que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{R}_n(g,x)=0$ et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n=0$.

   (b) Montrer que, pour tout $n\in\mathbf{N}$, $0\leqslant\mathrm{R}_{2n-1}(x)\leqslant\mathrm{R}_{2n-1}(g,x)$.

   (c) En déduire finalement que, pour tout x dans $]-a,a[$, $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

Exercice 7 : une série entière et un problème de dénombrement

Pour $n\in\mathbf{N}^*$, on note d_n le nombre de permutations de $\{1,2,\dots,n\}$ n'ayant pas de point fixe et on convient que $d_0=0$.

1. Montrer que $n!=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}d_k$.
2. Montrer que la série entière $\displaystyle\sum\frac{d_n}{n!}z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.
3. Pour $x\in]-1,1[$ on pose $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{d_n}{n!}x^n$; calculer $\mathrm{e}^x f(x)$ et en déduire la formule : $d_n=n!\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$.
4. Soit p_n la probabilité pour qu'une permutation de $\{1,\dots,n\}$ prise au hasard n'ait aucun point fixe. Quelle est la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 8 : une série entière et une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $x^2y''+(x-x^2)y'-y=0$.

1. Montrer que (E) admet sur $\mathbf{R}_+^*$ une solution de la forme $y=a+\dfrac{b}{x}$.
2. Trouver les solutions de (E) développables en série entière puis en déduire les solutions de (E) sur $\mathbf{R}_+^*$.