Adapté de l'exercice 5 du sujet de bacc juin 2006, Guadeloupe.

On définit deux suites (a_n) et (b_n) par :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ \text{pour } n \geqslant 0 : \ a_{n+1} = \dfrac{1}{3}\,(2\,a_n + b_n) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} b_0 = 12 \\ \text{pour } n \geqslant 0 : \ b_{n+1} = \dfrac{1}{4}\,(a_n + 3\,b_n) \end{cases}$$

1 Travail sur tableur

1. Dans une feuille de calcul, définir trois colonnes : une pour les indices, une pour les termes de la suite (a_n) et une pour les termes de la suite (b_n).
2. Faire des conjectures sur les variations et la convergence des suites (a_n) et (b_n).
3. Représenter sur un graphique de la feuille tableur les points de coordonnées $(a_n; b_n)$. Faire alors une conjecture sur une expression de b_n en fonction de a_n.
4. Faire de même avec les points de coordonnées $(a_n; a_{n+1})$.
5. Faire de même avec les points de coordonnées $(b_n; b_{n+1})$.

2 DM pour le . . .

2.1 Conjectures

Énoncer clairement toutes les conjectures faites.

2.2 Suite des différences

A l'aide des conjectures précédentes, quelle conjecture peut-on émettre sur la nature de la suite $(b_n - a_n)$?

2.3 Démonstrations

À l'aide des conjectures réalisées (les conjectures utilisées devront évidemment être démontrées), démontrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Déterminer la limite exacte des suites (a_n) et (b_n).

Corrigé

1 Feuille tableur

	A	B	C
1	indices	a_n	b_n
2	0	0	12
3	1	4	9
4	2	5,67	7,75
5	3	6,36	7,23
6	4	6,65	7,01
7	5	6,77	6,92
8	6	6,82	6,88
9	7	6,84	6,87
10	8	6,85	6,86
11	9	6,85	6,86
12	10	6,86	6,86
13	11	6,86	6,86
14	12	6,86	6,86
15	13	6,86	6,86
16	14	6,86	6,86
17	15	6,86	6,86
18	16	6,86	6,86
19	17	6,86	6,86
20	18	6,86	6,86
21	19	6,86	6,86
22	20	6,86	6,86
23	21	6,86	6,86
24	22	6,86	6,86
25	23	6,86	6,86

	A	B	C
1	indices	a_n	b_n
2	0	0	12
3	1	=(1/3)*(2*B2+C2)	=(1/4)*(B2+3*C2)
4	2	=(1/3)*(2*B3+C3)	=(1/4)*(B3+3*C3)
5	3	=(1/3)*(2*B4+C4)	=(1/4)*(B4+3*C4)
6	4	=(1/3)*(2*B5+C5)	=(1/4)*(B5+3*C5)
7	5	=(1/3)*(2*B6+C6)	=(1/4)*(B6+3*C6)
8	6	=(1/3)*(2*B7+C7)	=(1/4)*(B7+3*C7)
9	7	=(1/3)*(2*B8+C8)	=(1/4)*(B8+3*C8)
10	8	=(1/3)*(2*B9+C9)	=(1/4)*(B9+3*C9)
11	9	=(1/3)*(2*B10+C10)	=(1/4)*(B10+3*C10)
12	10	=(1/3)*(2*B11+C11)	=(1/4)*(B11+3*C11)
13	11	=(1/3)*(2*B12+C12)	=(1/4)*(B12+3*C12)
14	12	=(1/3)*(2*B13+C13)	=(1/4)*(B13+3*C13)
15	13	=(1/3)*(2*B14+C14)	=(1/4)*(B14+3*C14)
16	14	=(1/3)*(2*B15+C15)	=(1/4)*(B15+3*C15)
17	15	=(1/3)*(2*B16+C16)	=(1/4)*(B16+3*C16)
18	16	=(1/3)*(2*B17+C17)	=(1/4)*(B17+3*C17)
19	17	=(1/3)*(2*B18+C18)	=(1/4)*(B18+3*C18)
20	18	=(1/3)*(2*B19+C19)	=(1/4)*(B19+3*C19)
21	19	=(1/3)*(2*B20+C20)	=(1/4)*(B20+3*C20)
22	20	=(1/3)*(2*B21+C21)	=(1/4)*(B21+3*C21)
23	21	=(1/3)*(2*B22+C22)	=(1/4)*(B22+3*C22)
24	22	=(1/3)*(2*B23+C23)	=(1/4)*(B23+3*C23)
25	23	=(1/3)*(2*B24+C24)	=(1/4)*(B24+3*C24)
26	24	=(1/3)*(2*B25+C25)	=(1/4)*(B25+3*C25)

2 Conjectures

2.1 Les conjectures demandées

1. La suite (a_n) semble croissante, convergente vers $\approx 6{,}86$.
2. La suite (b_n) semble décroissante, convergente vers $\approx 6{,}86$.
3. Les points $(a_n ; b_n)$ semblent alignés sur la droite d'équation $y = \dfrac{-3}{4}x + 12$. Conjecture :
$$b_n = \frac{-3}{4}a_n + 12$$
4. Les points $(a_n ; a_{n+1})$ et les points $(b_n ; b_{n+1})$ semblent alignés sur la droite d'équation $y = \dfrac{5}{12}x + 4$.
Conjecture :
$$a_{n+1} = \frac{5}{12}a_n + 4 \qquad b_{n+1} = \frac{5}{12}b_n + 4$$

2.2 Recherche supplémentaire

La lecture des questions posées dans la suite du problème amène à se poser des questions sur la suite $(b_n - a_n)$.
On aurait pu dans la feuille de tableur représenter les premiers points de coordonnées $(b_n - a_n ; b_{n+1} - a_{n+1})$ pour constater qu'ils semblent alignés sur la droite d'équation $y = \dfrac{5}{12}x$, ce qui nous menait à la conjecture : « la suite $(b_n - a_n)$ est géométrique de raison $\dfrac{5}{12}$ ». Il resterait alors à démontrer ce résultat.

On peut aussi pour chercher à confirmer ce résultat faire afficher les quotients $\dfrac{b_{n+1}-a_{n+1}}{b_n-a_n}$ pour constater qu'ils semblent tous égaux.

	A	B	C	D	E
1	indices	a(n)	b(n)	v(n)=b(n)-a(n)	v(n+1)/v(n)
2	0	0	12	12	
3	1	4	9	5	0,42
4	2	5,67	7,75	2,08	0,42
5	3	6,36	7,23	0,87	0,42
6	4	6,65	7,01	0,36	0,42
7	5	6,77	6,92	0,15	0,42
8	6	6,82	6,88	0,06	0,42
9	7	6,84	6,87	0,03	0,42
10	8	6,85	6,86	0,01	0,42
11	9	6,85	6,86	0	0,42
12	10	6,86	6,86	0	0,42
13	11	6,86	6,86	0	0,42
14	12	6,86	6,86	0	0,42
15	13	6,86	6,86	0	0,42
16	14	6,86	6,86	0	0,42
17	15	6,86	6,86	0	0,42
18	16	6,86	6,86	0	0,42
19	17	6,86	6,86	0	0,42
20	18	6,86	6,86	0	0,42
21	19	6,86	6,86	0	0,42
22	20	6,86	6,86	0	0,42
23	21	6,86	6,86	0	0,42
24	22	6,86	6,86	0	0,42
25	23	6,86	6,86	0	0,42
26	24	6,86	6,86	0	0,42
27	25	6,86	6,86	0	0,42
28	26	6,86	6,86	0	0,42
29	27	6,86	6,86	0	0,42
30	28	6,86	6,86	0	0,42
31	29	6,86	6,86	0	0,42

	A	B	C	D	E
1	indices	a(n)	b(n)	v(n)=b(n)-a(n)	v(n+1)/v(n)
2	0	0	12	=C2-B2	
3	1	=(1/3)*(2*B2+C2)	=(1/4)*(B2+3*C2)	=C3-B3	=D3/D2
4	2	=(1/3)*(2*B3+C3)	=(1/4)*(B3+3*C3)	=C4-B4	=D4/D3
5	3	=(1/3)*(2*B4+C4)	=(1/4)*(B4+3*C4)	=C5-B5	=D5/D4
6	4	=(1/3)*(2*B5+C5)	=(1/4)*(B5+3*C5)	=C6-B6	=D6/D5
7	5	=(1/3)*(2*B6+C6)	=(1/4)*(B6+3*C6)	=C7-B7	=D7/D6
8	6	=(1/3)*(2*B7+C7)	=(1/4)*(B7+3*C7)	=C8-B8	=D8/D7
9	7	=(1/3)*(2*B8+C8)	=(1/4)*(B8+3*C8)	=C9-B9	=D9/D8
10	8	=(1/3)*(2*B9+C9)	=(1/4)*(B9+3*C9)	=C10-B10	=D10/D9
11	9	=(1/3)*(2*B10+C10)	=(1/4)*(B10+3*C10)	=C11-B11	=D11/D10
12	10	=(1/3)*(2*B11+C11)	=(1/4)*(B11+3*C11)	=C12-B12	=D12/D11
13	11	=(1/3)*(2*B12+C12)	=(1/4)*(B12+3*C12)	=C13-B13	=D13/D12
14	12	=(1/3)*(2*B13+C13)	=(1/4)*(B13+3*C13)	=C14-B14	=D14/D13
15	13	=(1/3)*(2*B14+C14)	=(1/4)*(B14+3*C14)	=C15-B15	=D15/D14
16	14	=(1/3)*(2*B15+C15)	=(1/4)*(B15+3*C15)	=C16-B16	=D16/D15
17	15	=(1/3)*(2*B16+C16)	=(1/4)*(B16+3*C16)	=C17-B17	=D17/D16
18	16	=(1/3)*(2*B17+C17)	=(1/4)*(B17+3*C17)	=C18-B18	=D18/D17
19	17	=(1/3)*(2*B18+C18)	=(1/4)*(B18+3*C18)	=C19-B19	=D19/D18
20	18	=(1/3)*(2*B19+C19)	=(1/4)*(B19+3*C19)	=C20-B20	=D20/D19
21	19	=(1/3)*(2*B20+C20)	=(1/4)*(B20+3*C20)	=C21-B21	=D21/D20
22	20	=(1/3)*(2*B21+C21)	=(1/4)*(B21+3*C21)	=C22-B22	=D22/D21
23	21	=(1/3)*(2*B22+C22)	=(1/4)*(B22+3*C22)	=C23-B23	=D23/D22
24	22	=(1/3)*(2*B23+C23)	=(1/4)*(B23+3*C23)	=C24-B24	=D24/D23

3 Démonstrations des conjectures

3.1 b_n en fonction de a_n

On a $3\,a_0+4\,b_0=48$.
Pour tout entier n, on a :

$$\begin{aligned}3\,a_{n+1}+4\,b_{n+1} &= 3\left(\frac{1}{3}\left(2\,a_n+b_n\right)\right)+4\left(\frac{1}{4}\left(a_n+3\,b_n\right)\right)\\ &= 2\,a_n+b_n+a_n+3\,b_n\\ &= 3\,a_n+4\,b_n\end{aligned}$$

Ce qui précède établit par le principe de récurrence que pour tout entier naturel n :

$$3\,a_n+4\,b_n=48$$

ou encore :

$$\text{Pour tout entier naturel } n,\ b_n=12-\frac{3}{4}\,a_n$$

3.2 a_{n+1} en fonction de a_n

$b_n=12-\dfrac{3}{4}\,a_n$, d'où pour $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{3}\left(2\,a_n + 12 - \frac{3}{4}a_n\right) \\ &= \frac{2}{3}a_n - \frac{1}{4}a_n + 4 \\ &= \frac{5}{12}a_n + 4 \end{aligned}$$

3.3 b_{n+1} en fonction de b_n

De $3\,a_n + 4\,b_n = 48$, on tire : $a_n = 16 - \dfrac{4}{3}\,b_n$.
Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{1}{4}\left(16 - \frac{4}{3}b_n + 3b_n\right) \\ &= 4 - \frac{1}{3}b_n + \frac{3}{4}\,b_n \\ &= 4 + \frac{5}{12}b_n \end{aligned}$$

3.4 La suite $(b_n - a_n)$ est géométrique

Avec ce qui précède :

$$\begin{aligned} b_{n+1} - a_{n+1} &= \left(\frac{5}{12}b_n + 4\right) - \left(\frac{5}{12}a_n + 4\right) \\ &= \frac{5}{12}\,(b_n - a_n) \end{aligned}$$

La suite $(b_n - a_n)$ est donc géométrique de raison $\dfrac{5}{12}$.

3.5 Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

3.5.1 Différence de limite nulle.

On a :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ b_n - a_n = 12 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{12}\right)^n = 0$, d'où :

$$\lim_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = 0$$

3.5.2 (a_n) croissante.

Amorce.
On a $a_0 = 0$ et $a_1 = 4$ donc $a_0 < a_1$.
Hérédité.
Soit p un entier pour lequel on aurait $a_p < a_{p+1}$.
On a alors $f(a_p) < f(a_{p+1})$ où f est la fonction affine $x \longmapsto \dfrac{5}{12}\,x + 4$ strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Or $f(a_p) = a_{p+1}$ et $f(a_{p+1}) = a_{p+2}$, d'où $a_{p+1} < a_{p+2}$.
Conclusion.
La suite (a_n) est strictement croissante (à partir du rang 0).

3.5.3 (b_n) est strictement décroissante.

On a $b_0 = 12$ et $b_1 = 9$ donc $b_0 > b_1$.
On procède alors comme dans la question précédente par récurrence à l'aide de la fonction f (qui est une fonction conservant l'ordre sur $\mathbb{R}$).

3.5.4 Les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes.

3.6 Détermination de la limite

3.6.1 Méthode 1

Les deux suites étant adjacentes, elles convergent et vers une même limite ℓ.
Comme on a obtenu la relation de récurrence $a_{n+1} = \dfrac{5}{12}a_n + 4$, on a $\ell = \dfrac{5}{12}\ell + 4$, soit

$$\boxed{\ell = \frac{48}{7}}$$

3.6.2 Méthode 2

On peut aussi ici donner une expression de a_n et de b_n en fonction de n.
De

$$\begin{cases} -a_n + b_n = 12 \times \left(\dfrac{5}{12}\right)^n \\ 3\,a_n + 4\,b_n = 48 \end{cases}$$

on tire :

$$a_n = \frac{48}{7} - \frac{48}{7} \times \left(\frac{5}{12}\right)^n \qquad b_n = \frac{36}{7} \times \left(\frac{5}{12}\right)^n + \frac{48}{7}$$

D'où

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{48}{7}} \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{48}{7}}$$