Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.
On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x} \end{cases}$$

Soient A ; B ; C trois points définis par leurs coordonnées :

$$A(1;0); \quad B(1;1); \quad C(0;1)$$

1 Travail sur tableur

1. Dans une feuille de calcul de tableur, à l'aide de deux colonnes, choisir au hasard un grand nombre N de points se trouvant à l'intérieur du carré $OABC$.
2. Parmi ces points, compter le nombre n de points appartenant à $\mathscr{D}$.
3. Faire ensuite afficher le rapport $\dfrac{n}{N}$.
4. Relancer plusieurs fois la feuille de calcul. Le rapport obtenu varie-t-il beaucoup ?

2 Travail sur Maxima

Avec le logiciel Maxima, l'instruction

```
u(n):=sum((1/n)*sqrt(j/n),j,0,n-1);
```

définit la suite (u_n) dont chaque terme, pour $n \in \mathbb{N}^*$, est donné par :

$$u_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n}\sqrt{\frac{j}{n}}$$

Faire afficher des valeurs approchées de u_n pour de grandes valeurs de n.
Quelle conjecture peut-on émettre sur $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$?

3 Des tentatives de justifications

Dans cette partie, on demande d'expliquer les phénomènes observés sans chercher à les justifier rigoureusement.
Proposer une explication plausible de la coïncidence des valeurs numériques obtenues dans la feuille de tableur et dans la feuille de calcul formel.

1 Commentaires et corrigé

1.1 Compétences TICE

– Fonction ALEA().
– Fonction SI().

1.2 Compétences mathématiques

– Calcul d'une intégrale.
– Interprétation géométrique d'une somme. Faire le lien avec une méthode travaillée en classe sur quelques exemples (méthode des rectangles pour le calcul de l'aire).

1.3 Proposition de corrigé

1.3.1 Tableur

1. L'aire (en u.a.) de $\mathscr{D}$ est :

$$\int_0^1 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

2. Comme on a choisi les points au hasard dans le rectangle de sommets $O(0;0)$, $A(1;0)$; $B(1;1)$; $C(0;1)$, le rapport $\frac{n}{N}$, pour N très grand, est approximativement égal au rapport $\frac{\int_0^1 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t}{1}$ de l'aire du domaine $\mathscr{D}$ sur l'aire du rectangle $OABC$. D'où :

$$\frac{n}{N} \approx \frac{2}{3}$$

Une remarque.
ALEA() choisit au hasard un nombre dans $[0;1[$. Certains côtés du carré sont donc "atteints" et d'autres non. Mais les aires ainsi ajoutées ou négligées sont nulles.

1.3.2 Calcul de la somme

```
u(n):=sum((1/n)*sqrt(j/n),j,0,n-1);

(%i8) float(u(1000)), numer;
```

(%o8) 0.66616013439368

```
(%i9) float(u(10000)), numer;
```

(%o9) 0.66661645919711

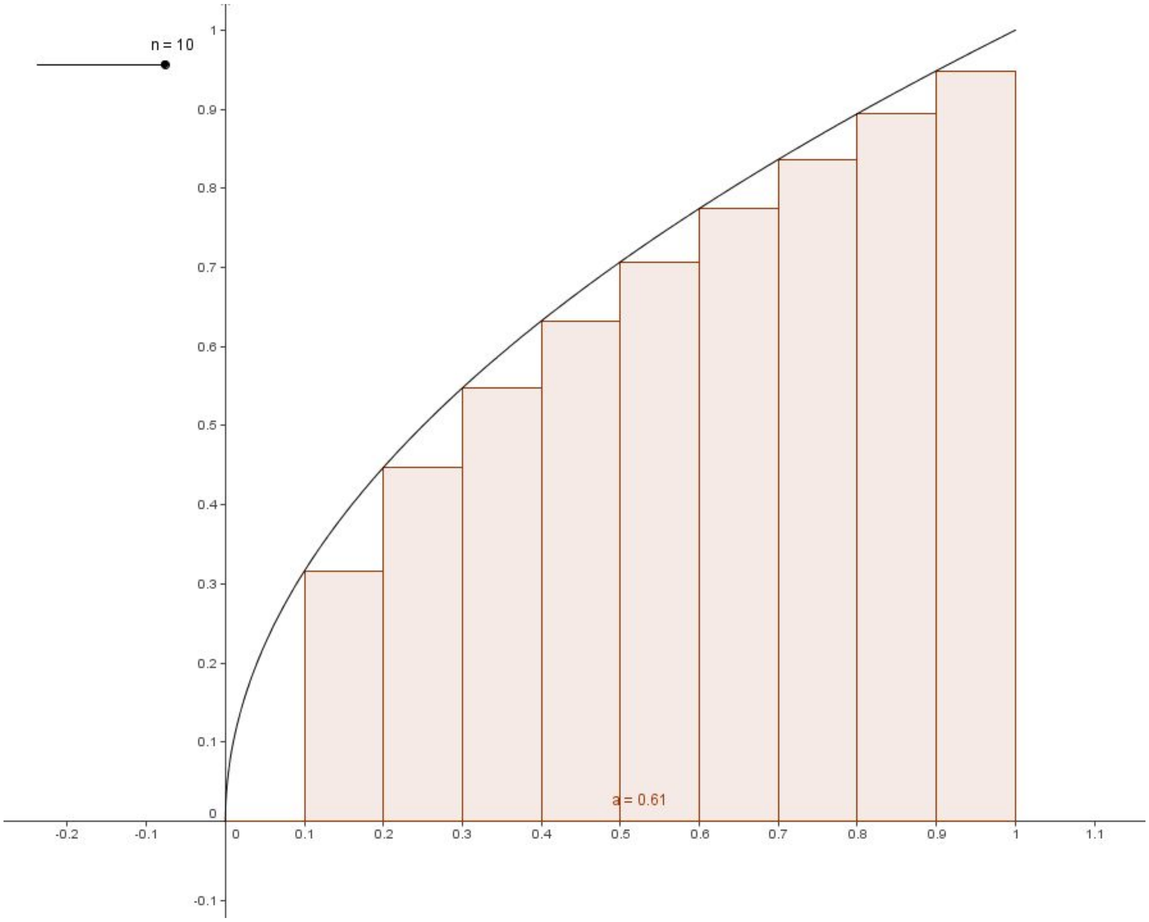
```
(%i10) float(u(100000)), numer;
```

(%o10) 0.6666616600969

Conjecture :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3}$$

On découpe l'intervalle $[0;1]$ en intervalles de longueur $\frac{1}{n}$. On construit ensuite les rectangles de base $[A_iA_{i+1}]$ où $A_i\left(\frac{i}{n};0\right)$; $A_{i+1}\left(\frac{i+1}{n};0\right)$ et de hauteur $\sqrt{\frac{i}{n}}$.



Ainsi :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$